Vektoranalys

1.

Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför planet $z = 0$.

Solution:

Vi betecknar den del av paraboloiden som ligger ovanför konen med S, och S får parametriseras av ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ där $(x, y) \in D$ och $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Den sökta arean är nu

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_S dS \\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy \\
&= [x = \rho \cos \phi,\ y = \rho \sin \phi,\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\rho^2} d\phi \right) \rho d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho d\rho \\
&= [u = 1 + 4\rho^2] \\
&= \frac{\pi}{4} \int_1^5 u^{1/2} du \\
&= \frac{\pi}{6} [5\sqrt{5} - 1].
\end{aligned}
$$

2.

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A}(x, y, z) = (9xz^2, yx^2, 4zy^2)$ ut genom ytan

$$S = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 4, z \geq 0\}$$

där i varje punkt på S väljer man den enhetsnormal $\hat{n}$ som lyder $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

Solution:

En standardräkning ger att $\nabla \cdot \mathbf{A} = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Lägg till ytan $S_1 : x^2 + 4y^2 \leq 4,\ z = 0$. Ytorna $S + S_1$ avgränsar en kropp $V : x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 4,\ z \geq 0$. Flödet av $\mathbf{A}$ ut ur V genom S är

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$$

Enligt Gauss Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V (x^2 + 4y^2 + 9z^2) dxdydz.$$

På S_1 är $z = 0$ och $\hat{n} = -\hat{z}$ och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{n} = 4zy^2 = 0$ på S_1, vilket nu ger att

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iiint_V (x^2 + 4y^2 + 9z^2) dxdydz \\
&= [x = r\cos\phi\sin\theta,\ y = \frac{r}{2}\sin\phi\sin\theta,\ z = \frac{r}{3}\cos\theta,\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \phi \le 2\pi] \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin\theta \, d\phi \right) d\theta \right) dr \\
&= \frac{32\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

3.

Beräkna kurintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (xz, xy^2 + 2z, xy + z)$$

och Γ är kurvan $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ med

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_1 \colon x = 0, y^2 + z^2 = 1, z > 0, y \colon -1 \to 1; \\
&\Gamma_2 \colon z = 0, x + y = 1, y \colon 1 \to 0; \quad \text{och} \\
&\Gamma_3 \colon z = 0, x - y = 1, y \colon 0 \to -1.
\end{aligned}
$$

Solution:

Vi har

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

För Γ_1 tar vi ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta) = (0, \cos\theta, \sin\theta)$ med $\theta : \pi \to 0$ sä $y : -1 \to 1$. Då har vi att

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_\pi^0 (0, 2\sin\theta, \sin\theta) \cdot \mathbf{r}'(\theta) d\theta \\
&= \int_\pi^0 (0, 2\sin\theta, \sin\theta) \cdot (0, -\sin\theta, \cos\theta) d\theta \\
&= \int_\pi^0 [\cos\theta\sin\theta - 2\sin^2\theta] d\theta \\
&= \int_\pi^0 [\cos 2\theta - 1] d\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

För Γ_2 ortsvektorn är $\mathbf{r}(y) = (1 - y, y, 0)$ och $y : 1 \to 0$ som ger

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_1^0 (0, y^2(1-y), y(1-y))\cdot \mathbf{r}'(y)dy \\
&= \int_1^0 (0, y^2(1-y), y(1-y))\cdot(-1,1,0)dy \\
&= \int_1^0 y^2(1-y)dy \\
&= -\frac{1}{12}.
\end{aligned}
$$

För Γ_3 ortsvektorn är $\mathbf{r}(y) = (1+y, y, 0)$ och $y : 0 \to -1$ som ger

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{-1} (0, y^2(1+y), y(1+y))\cdot \mathbf{r}'(y)dy \\
&= \int_0^{-1} (0, y^2(1+y), y(1+y))\cdot(1,1,0)dy \\
&= \int_0^{-1} y^2(1+y)dy \\
&= -\frac{1}{12}.
\end{aligned}
$$

Vi får

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \pi - \frac{1}{6}.$$

4.

Finn alla potentialer till vektorfältet

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \left(4(x^2+y^2+z)x, 4(x^2+y^2+z)y, 2(x^2+y^2+z)\right).$$

Solution:

Vi leter efter $\Phi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sådan att $\Phi'_x(x,y,z) = 4(x^2+y^2+z)x$. Därför är $\Phi(x,y,z) = (x^2+y^2+z)^2 + \phi(y,z)$ Derivatan med avseende på y måste lyder $\Phi'_y(x,y,z) = 4(x^2+y^2+z)y$ därför är $\phi_y(y,z) = 0$ och därför är $\phi(y,z) = \varphi(z)$. Vi har även $\Phi'_z(x,y,z) = 2(x^2+y^2+z)$ så $\varphi(z)$ är konstant. Vi ser att $\Phi(x,y,z) = (x^2+y^2+z)^2 + C$ för en konstant C.

---

5. Beräkna kurintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \left(\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}, z\right)$$

och Γ är skärningskurvan mellan cylindern $2x^2+3y^2 = 9$ och planet $x+y+z = 17$. Kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(0,0,20)$.

Solution:

Lösning 1: En standardräkning ge

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

i alla punkter där $x^2 + y^2 \neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$. Kurvan $\Gamma + \Gamma_1$ utgör randen till en yta S (ett ben på en leggings) på vilken $\mathbf{A}$ är C^1 och $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Enligt Stokes Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

och av detta följer det att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där Γ och Γ_1 genomlöps i samma positiva riktning (d.v.s. moturs sett från $(0, 0, 20)$). Vi parametriserar Γ_1 genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\phi) = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$$

med $\phi : 0 \to 2\pi$. Vi får nu

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \sin^3 \\ -\cos\phi \sin^2\phi \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} d\phi \\
&= -\int_0^{2\pi} (\sin^4\phi + \cos^2 \sin^2\phi)]d\phi \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\phi}{2}\, d\phi \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Vektorfältet kan skrivas som

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= -\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} [-y\,\hat{x} + x\,\hat{y}] + z\,\hat{z} \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ z = z] \\
&= -\frac{\sin^2\phi}{\rho} [-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}] + z\,\hat{z} \\
&= -\frac{\sin^2\phi}{\rho}\,\hat{\phi} + z\,\hat{z}.
\end{aligned}$$

Man får $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $\rho \neq 0$ som ovan. Sedan väljer man S och Γ_1 som ovan med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$ och vi får (med det val av orientering som gjordes ovan)

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\ &= -\int_0^{2\pi} (\sin^2 \phi)\, \hat{\phi} \cdot \hat{\phi}\, d\phi \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

6.

Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \left(\frac{xz}{(5+x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{zy}{(5+x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z^2}{(5+x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

genom cylinderytan $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 2$.

Solution:

Parametrisera S genom ortsvektorn (i cylinderkoordinater):

$$\mathbf{r}(\phi, z) = 2\hat{\rho} + z\hat{z}$$

med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 2$. På S har vi (i cylinderkoordinater)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(9+z^2)^{3/2}} [2z\hat{\rho} + z^2\, \hat{z}].$$

Observera att

$$\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = 2\hat{\phi} \times \hat{z} = 2\hat{\rho}.$$

Flödet ut genom S är då

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n}\, dS &= \iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z)\, d\phi\, dz \\ &= 2 \iint_D \mathbf{A} \cdot \hat{\rho}\, d\phi\, dz \\ &= 4 \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{z}{(9+z^2)^{3/2}} d\phi \right) dz \\ &= 8\pi \int_0^2 \frac{z}{(9+z^2)^{3/2}}\, dz \\ &= 8\pi \left[-\frac{1}{\sqrt{9+z^2}} \right]_0^2 \\ &= 8\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{13}} \right].\end{aligned}$$
