Vektoranalys

1.

Beräkna arean av den del av paraboloiden $2z = x^2 + y^2$ som ligger i klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 3$.

Solution:

Betecknar den del av paraboloiden som ligger i klotet med S. När paraboloiden skär sfären är $2z + z^2 = 3$, det vill säga $z = -1 \pm 2$. Eftersom $z \ge 0$ på paraboloiden måste $z = 1$ och därför är projektionen av S på xy-planet är skivan D som ges av olikheten $x^2 + y^2 \le 2$.

Sen får S parametriseras av ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, (x^2 + y^2)/2)$ där $(x, y) \in D$. Den sökta arean är nu

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_S dS \\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ 0 \le \rho \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\rho^2} d\phi \right) \rho d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\rho^2}\, \rho d\rho \\
&= [u = 1 + \rho^2] \\
&= \pi \int_1^3 u^{1/2} du \\
&= \frac{2\pi}{3}[3\sqrt{3} - 1].
\end{aligned}
$$

2.

Bestäm en potential till vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = ((2x+z)\cos(x^2+xz), -(z+1)\sin(y+yz), x\cos(x^2+xz) - y\sin(y+yz))$$

och sen beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är kurvan $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3, \pi t - \sin(\pi t/2))$ med $t \in [0, 1]$.

Solution: För att hitta en potential (Φ sådan att $A = \nabla\Phi$) behöver vi lösa systemet

$$\Phi'_x(x, y, z) = (2x + z)\cos(x^2 + xz) \tag{1}$$
$$\Phi'_y(x, y, z) = -(z + 1)\sin(y + yz) \tag{2}$$
$$\Phi'_z(x, y, z) = x\cos(x^2 + xz) - y\sin(y + yz) \tag{3}$$

Från (1) får vi att $\Phi(x, y, z) = \sin(x^2 + xz) + g(y, z)$ och därför måste $\Phi'_y(x, y, z) = g'_y(y, z)$ så enligt (2) är $g(y, z) = \cos(y + yz) + h(z)$. Det betyder att $\Phi(x, y, z) = \sin(x^2 + xz) + \cos(y + yz) + h(z)$ så (3) säger att $h'(z) = 0$, så potentialen måste vara

$$\Phi(x, y, z) = \sin(x^2 + xz) + \cos(y + yz) + C$$

för en godtycklig konstant C.

För att räkna $\int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ får vi även välja $C = 0$. Eftersom $\mathbf{r}(1) = (1, 1, \pi - 1)$ och $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$ är integralen

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_\gamma \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} \\
&= \Phi(\mathbf{r}(1)) - \Phi(\mathbf{r}(0)) = \Phi(1, 1, \pi - 1) - \Phi(0) \\
&= (\sin(1 + \pi - 1) + \cos(1 + \pi - 1)) - (\sin(0) + \cos(0)) \\
&= 0 - 1 - 1 = -2.
\end{aligned}$$

3.

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A}(x, y, z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$ genom ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x, y, z \geq 0$ i riktningen som ges genom valet av normalen som pekar i den positiva z-rikningen.

Solution:

Låt V vara den kropp som avgränsas av ytan

$$S := \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x, y, z \geq 0\}$$

och sidoytorna

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 = 1,\ x, y \geq 0,\ z = 0\}, \\
S_2 &:= \{(x, y, z)\colon y^2 + z^2 = 1,\ y, z \geq 0,\ x = 0\} \quad \text{och} \\
S_3 &:= \{(x, y, z)\colon x^2 + z^2 = 1,\ x, z \geq 0,\ y = 0\}
\end{aligned}$$

Vi söker flödet $\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$ där $\mathbf{n}$ pekar ut från V. Enligt Gauss Sats har vi

$$\iint_{S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$$

för flödet av $\mathbf{A}$ ut ur V. På S_1 är $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ medan $\mathbf{A} = (xy^2, 0, 0)$ och då är $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ på S_1. På S_2 är $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ medan $\mathbf{A} = (0, yz^2, 0)$ och då är $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ på S_2. På S_3 är $\mathbf{n} = (0, -1, 0)$ medan $\mathbf{A} = (0, 0, x^2 z)$ och då är $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ på S_3. Av detta följer att $\displaystyle\iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{A} \cdot \hat{n}\, dS = 0$ och vi får då att flödet är

$$
\begin{aligned}
&\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV \\
&= \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz \\
&= \begin{bmatrix} x = r\cos\phi\sin\theta,\ y = r\sin\phi\sin\theta,\ z = r\cos\theta, \\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le\pi/2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 r^4 dr \\
&= \frac{\pi}{10}.
\end{aligned}
$$

4.

Bestäm konstanten $a \in \mathbf{R}$ så att vektorfältet

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(r,\theta,\phi) &= [2r\sin 2\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi]\,\hat{r} \\
&\quad + [2r\cos 2\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi]\,\hat{\theta} + [-2r\cos\theta\sin\phi + \cos\phi]\,\hat{\phi}
\end{aligned}
$$

har en potential och beräkna då alla potentialer till $\mathbf{A}$.

Solution:

Det är uppgift 4 från TATA44/TEN1 2016-01-08 med $a = 1$, $b = 1$ och $c = -2$. På grund av att uppgiften var dåligt skriven ger jag alla 3 poäng på uppgiften.

---

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ där

$$
\mathbf{A}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)
$$

och Γ är skärningskurvan mellan planet $x+2y+3z = 10$ och cylindern $x^2+y^2 = 2$. Kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(0,0,17)$. Motivera noga!

Solution:

Lösning 1: En standardräkning ge

$$
\nabla\times\mathbf{A} = 0
$$

i alla punkter där $x^2+y^2 \neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $x^2+y^2 = 2,\ z = 0$. Kurvan $\Gamma\cup\Gamma_1$ utgör randen till en yta S (ett ben på en leggings) på vilken $\mathbf{A}$ är C^1 och $\nabla\times\mathbf{A} = 0$. Enligt Stokes Sats har vi

$$
\int_{\Gamma\cup\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = 0
$$

och av detta följer det att

$$
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}
$$

där Γ och Γ_1 genomlöps i samma positiva riktning (d.v.s. moturs sett från $(0, 0, 17)$). Vi parametriserar Γ_1 genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\phi) = 2\cos\phi\,\hat{x} + 2\sin\phi\,\hat{y}$$

med $\phi : 0 \to 2\pi$. Vi får nu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) = \left(\frac{-2\sin\phi}{4}, \frac{2\cos\phi}{4}, 0\right)$$

och

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{-\sin\phi}{2} \\ \frac{\cos\phi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2\sin\phi \\ 2\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

6.

Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

ut ur ytan $x = y^2 + z^2$ med $0 \leq x \leq 1$ så att $\mathbf{n} \cdot (1, 0, 0) < 0$.

Solution:

Vektorfältet $\mathbf{A}$ är singulärt på x-axeln. Låt S_ϵ beteckna ytan $x = y^2 + z^2,\ 0 < \epsilon^2 \leq x \leq 1$, och låt S vara den givna ytan $x = y^2 + z^2,\ 0 \leq x \leq 1$. Vi har då det sökta flödet Φ som

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \lim_{\epsilon \to 0} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Parametrisera S_ϵ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = (\rho^2, \rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$ där $(\rho, \phi) \in D$ med $D : \epsilon \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\rho, -2\rho^2\cos\phi, -2\rho^2\sin\phi)$. Vi ska ha $\mathbf{n} \cdot (1, 0, 0) \leq 0$ och då måste vi välja $\mathbf{n} = -(\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi)/\|\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi\|$ av vilket det nu följer att vi har

$$\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS &= -\iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi)\, d\rho\, d\phi \\
&= \iint_D \left(\frac{1}{\rho}, \frac{\cos\phi}{\rho^2}, \frac{\sin\phi}{\rho^2}\right) \cdot (-\rho, 2\rho^2\cos\phi, 2\rho^2\sin\phi) d\rho\, d\phi \\
&= \iint_D d\rho\, d\phi \\
&= 2\pi(1 - \epsilon).
\end{aligned}$$

Slutligen erhåller vi

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n}\, dS = \lim_{\epsilon \to 0} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = 2\pi.$$
