Vektoranalys

1.

Betrakta en yta S som parametriseras av funktionen $\mathbf{u}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definierad enligt formeln

$$\mathbf{u}(s,t) = (e^s - e^{-s}, t, \cos(st)).$$

(a) Använd parametriseringen $\mathbf{u}$ för att ta fram en normal vektor till ytan S uttryckt i s och t.

(b) Visa att normalen du beräknade i del (a) är aldrig noll.

Solution:

(a) Vi kan räkna att

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'_s(s,t) &= (e^s + e^{-s}, 0, -t\sin(st)) \quad \text{och}\\ \mathbf{u}'_t(s,t) &= (0, 1, -s\sin(st))\end{aligned}$$

så en normal till S är

$$\mathbf{n}(s,t) = \mathbf{u}'_s(s,t) \times \mathbf{u}'_t(s,t) = (t\sin(st), (e^s + e^{-s})s\sin(st), e^s + e^{-s}).$$

(b) Eftersom exponentialfunktionen är positivt är $e^s + e^{-s} > 0$ och därför är $\mathbf{n}(s,t) \neq \mathbf{0}$ för alla $s, t \in \mathbf{R}$ ty tredje komponenten är aldrig noll.

2.

Låt $S = \{(x,y,z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ vara en sfär med en given radie $a > 0$.

(a) Beräkna $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)d\sigma$.

(b) Beräkna $\iint_S z^2 d\sigma$. [Tips: Symmetri och svaret från (a) kan förkorta dina beräkningar.]

Solution:

(a) Vi parametriserar ytan S med $\mathbf{u}(\theta,\varphi) = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$ där $\theta \in [0,\pi]$ och $\varphi \in [0, 2\pi]$. Då är $\mathbf{u}'_\theta(\theta,\varphi) = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta)$ och $\mathbf{u}'_\varphi(\theta,\varphi) = (-a\sin\theta\sin\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, 0)$ så

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 a^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi = 4\pi a^4.$$

(b) Enligt symmetri är $\iint_S x^2 d\sigma = \iint_S y^2 d\sigma = \iint_S z^2 d\sigma$ så utifrån (a) ser vi att

$$\iint_S z^2 d\sigma = \frac{4\pi a^4}{3}.$$

3.

Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som är definierad enligt formeln

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (\sin(yz), zx\cos(yz) + 3y^2, xy\cos(yz)).$$

(a) Vad menar vi när vi säger ett vektorfält är ett *potentialfält*?

(b) Visa att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält.

Solution:

(a) Vi menar att det finns en skalärfunktion ϕ (med samma definitionsmängd som $\mathbf{F}$) sådan att $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

(b) Eftersom $\mathbf{R}^3$ är enkel sammanhängande duggar det att kontrollera $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Vi räknar att

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin(yz) & zx\cos(yz) + 3y^2 & xy\cos(yz) \end{vmatrix}. \\ &= (x\cos(yz) - xyz\sin(yz) - x\cos(yz) + xyz\sin(yz))\mathbf{i} \\ &+ (y\cos(yz) - y\cos(yz))\mathbf{j} + (z\cos(yz) - z\cos(yz)\mathbf{k} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

så $\mathbf{F}$ är ett potentialfält.

4.

Betrakta ytan $S = \{(x,y,z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ och låt $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara ett vektorfält som ges av formeln

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (-e^x\cos y, e^x\sin y, z^6)$$

för alla $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom S orienterad med en normal som pekar bort från origo.

Solution:

Vi kan använda oss av Gauss sats för att räkna ut flödet. Låt V vara klotet med randen S. Då är

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma &= \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}dxdydz = \iiint_V (-e^x\cos y + e^x\cos y + 6z^5)dxdydz \\ &= \iiint_V 6z^5dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 6z^5dz\right)dxdy = 0.\end{aligned}$$

---

5. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

där $\mathbf{F}(x,y,z) = (2yz, xz, xy)$ för alla $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ och Γ är snittet mellan cylindern $\{(x,y,z)\colon x^2 + y^2 = 1\}$ och paraboliska cylindern $\{(x,y,z)\colon z = y^2\}$ orienterad moturs sett från punkten $(0,0,17)$.

Solution:

Lösningsförslag saknas och inte kommer skrivas.

6.

Betrakta ett vektorfält

$$\mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = (5\cos\theta + r\cos^2\theta)\mathbf{e}_r - \sin\theta(5 + r\cos\theta)\mathbf{e}_\theta$$

som ges i sfäriska koordinater (r,θ,φ).

(a) Beräkna $\operatorname{div}\mathbf{F}$.

(b) Beräkna flödet

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$$

där S är en slipad orienterad yta som är randen till en öppen mängd V av volym π. Normalvektorn $\hat{\mathbf{n}}$ väljes så att den pekar ut från V.

Solution:

(a) Vi räknar att

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial((5\cos\theta + r\cos^2\theta)r^2\sin\theta)}{\partial r} - \frac{\partial((5 + r\cos\theta)r\sin^2\theta)}{\partial\theta}\right)\\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\big((\cos^2\theta)r^2\sin\theta + 2(5\cos\theta + r\cos^2\theta)r\sin\theta\\
&\quad +(r\sin\theta)(r\sin^2\theta) - (5 + r\cos\theta)(2r\sin\theta\cos\theta)\big)\\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta\right)\\
&= \frac{r^2\sin\theta}{r^2\sin\theta} = 1
\end{aligned}$$

(b) Vi kan använda Gauss sats för att räkna

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}dxdydz = \iiint_V dxdydz = \pi.$$