TATA44/TEN1 **Tentamen, 2021-01-05**

Vektoranalys

1.

Betrakta en yta S som beskrivs i cylinderkoordinater av ekvationen $z = f(\rho, \varphi)$ där (ρ, φ) varierar i ett område D där ρ är positivt och f är ett C^1 funktion.

(a) Ge en parametrisering $\mathbf{u}\colon D \to S$ av ytan S där $\mathbf{u}(\rho, \varphi)$ är kartesiska koordinater (d.v.s. xyz-koordinater) av en punkt på S.

(b) Visa att arean av ytan S ges av formeln

$$\iint_D \sqrt{1 + f'_\rho(\rho,\varphi)^2 + \frac{f'_\varphi(\rho,\varphi)^2}{\rho^2}}\, \rho d\rho d\varphi.$$

Solution:

(a) $\mathbf{u}(\rho, \varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, f(\rho, \varphi))$.

(b) Vi räknar att

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}'_\rho(\rho,\varphi) &= (\cos\varphi, \sin\varphi, f'_\rho(\rho,\varphi)) \\
\mathbf{u}'_\varphi(\rho,\varphi) &= (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, f'_\varphi(\rho,\varphi))
\end{aligned}$$

så en normal till ytan ges av

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}'_\rho(\rho,\varphi) \times \mathbf{u}'_\varphi(\rho,\varphi) \\
&= (f'_\varphi(\rho,\varphi)\sin\varphi - f'_\rho(\rho,\varphi)\rho\cos\varphi, -f'_\rho(\rho,\varphi)\rho\sin\varphi - f'_\varphi(\rho,\varphi)\cos\varphi, \rho).
\end{aligned}$$

Därför är arean av S lika med

$$\begin{aligned}
\iint_S d\sigma &= \iint_D |\mathbf{u}'_\rho(\rho,\varphi) \times \mathbf{u}'_\varphi(\rho,\varphi)| d\rho d\varphi \\
&= \iint_D \sqrt{1 + f'_\rho(\rho,\varphi)^2 + \frac{f'_\varphi(\rho,\varphi)^2}{\rho^2}}\, \rho d\rho d\varphi.
\end{aligned}$$

2.

Använd formeln från uppgift (1)(b) för att beräkna arean av en yta S som ges i cylinderkoordinator av ekvationen $z = \rho^2\sin(2\varphi)$ där (ρ, φ) varierar i ett område $D = \{(\rho, \varphi)\colon \frac{1}{2} \le \rho \le \sqrt{2}, 0 \le \varphi \le \pi\}$.

Solution:

Vi använder formeln från 1(b) med $f(\rho,\varphi) = \rho^2 \sin(2\varphi)$ och $D = \{(\rho,\varphi)\colon 1 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$:

$$\begin{aligned}
\iint_S d\sigma &= \iint_D \sqrt{1 + f'_\rho(\rho,\varphi)^2 + \frac{f'_\varphi(\rho,\varphi)^2}{\rho^2}}\, \rho d\rho d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (2\rho\sin(2\varphi))^2 + \frac{(2\rho^2\cos(2\varphi))^2}{\rho^2}}\, \rho d\rho d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho d\rho d\varphi \\
&= \pi \left[\frac{1}{12} \left(1+4\rho^2\right)^{3/2} \right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{(27 - 2\sqrt{2})}{12}\pi
\end{aligned}$$

3.

Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som är definierad enligt formeln

$$\mathbf{F}(x,y,z) = e^{x+y}\mathbf{i} + e^{xy}\mathbf{j}.$$

Avgör med bevis om $\mathbf{F}$ är ett potentialfält eller inte.

Solution:

Funktionen $\mathbf{F}$ är en C^1 funktion och är definierad i en enkel sammanhängande mängd. Därfär är den en potentialfält om och endast om $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Vi räknar att

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0, 0, ye^{xy} - e^{x+y})$$

som inte är noll (t.ex. är $\operatorname{rot}\mathbf{F}(1,1,1) = (0,0,(1-e)e)$ och därför är $\mathbf{F}$ inte ett potentialfält.

4.

Betrakta ytan $S = \{(x,y,z)\colon y = 10 - x^2 - z^2, y \geq 1\}$ orienterad så att enhets normalen $\hat{\mathbf{n}}$ har en positiv y-komponent. Beräkna

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

där

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz + 5z, e^x\cos(yz), x^2 y).$$

Solution:

Låt $\Gamma = \{(x,y,z)\colon x^2 + z^2 = 9, y = 1\}$ orienterad moturs sett från $(0,10,0)$. Enligt Stokes sats är

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Vi parametriserar Γ med $\mathbf{u}(t) = (3\sin t, 1, 3\cos t)$ för $t \in [0, 2\pi)$ och därför är

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (18\cos t\sin t + 15\cos t, e^{3\sin t}\cos(3\cos t), 9\sin^2 t) \cdot (3\cos t, 0, -3\sin t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} 54\cos^2 t\sin t + 45\cos^2 t - 27\sin^3 t dt = 45\pi
\end{aligned}$$

5.

Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$. Man kan lätt kontrollera att

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 1.$$

Använd $\mathbf{F}$ och Gauss sats för att beräkna volymen av

$$M = \{(x, y, z)\colon 3x^2 + 3y^2 - 16 < z < 9 - x^2 - y^2\}.$$

Solution:

Enligt Gauss sats är volymen av M lika med

$$\iint_M \operatorname{div}\mathbf{F}dxdydz = \iint_{\partial M} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ är normalen som pekar utåt från M. Vi delar $\partial M = S_1 \cup S_2$ där S_1 parametriseras med $\mathbf{u}_1(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$ och S_2 parametriseras med $\mathbf{u}_2(x, y) = (x, y, 3x^2 + 3y^2 - 16)$ för $x^2 + y^2 \le 25/4$. Med dessa parametriseringar är

$$\iint_{\partial M} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\, d\sigma - \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\, d\sigma$$

där $\hat{\mathbf{n}}_1$ och $\hat{\mathbf{n}}_2$ är normalerna inhämtade från $\mathbf{u}_1$ respektive $\mathbf{u}_2$. Vi räknar

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\, d\sigma &= \frac{1}{3}\iint_{x^2+y^2\le 25/4} (x, y, 9 - x^2 - y^2)\cdot(2x, 2y, 1)dxdy \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{5/2} (r^2 + 9)rdrd\theta = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{r^4}{4} + \frac{9r^2}{2}\right]_0^{5/2}\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\, d\sigma &= \frac{1}{3}\iint_{x^2+y^2\le 25/4} (x, y, 3x^2 + 3y^2 - 16)\cdot(-6x, -6y, 1)dxdy \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{5/2} (-3r^2 - 16)rdrd\theta = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{3r^4}{4} - \frac{16r^2}{2}\right]_0^{5/2}\end{aligned}$$

så volymen av M är

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\, d\sigma - \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\, d\sigma = \frac{2\pi}{3}\left[r^4 + \frac{25r^2}{2}\right]_0^{5/2} = \frac{625\pi}{8}$$

6.

Kom ihåg att Greens formel säger att

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

där D är ett begränsad öppen mängd i $\mathbf{R}^2$ med en tillräckligt snäll rand ∂D orienterad moturs, och P och Q är C^1 funktioner definierade på $D \cup \partial D$. Visa med hjälp av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

att Greens formel är ett specialfall av Stokes sats.

Solution:

Vi tillämpar Stokes sats till området $S = D \times \{0\}$. Vi får att

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

där $\Gamma = \partial D \times \{0\}$ är randkurvan till S som är orienterad moturs sätt från $(0, 0, 1)$.

Eftersom enhets normalen till S är $(0, 0, 1)$ är vänsterledet bara integralen av tredje komponenten av $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ över S:

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

ty P och Q är oberoende av z och S ligger i xy-planet.

Återigen eftersom P och Q är oberoende av z och Γ är en kurva i xy-planet är

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma (P, Q, 0) \cdot (dx, dy, 0) = \int_\Gamma P dx + Q dy.$$

Därfär får vi att

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

som är Greens formel.