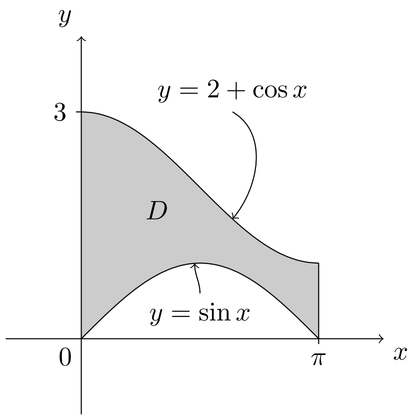
Vektoranalys

1. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F}(x,y) = e^x \mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ och γ är randkurvan till området D i figuren nedan orienterad moturs.



Solution: Vi tillämpar Green's sats för att se att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma e^x dx + 2x dy = \iint_D \frac{\partial(2x)}{\partial x} - \frac{\partial(e^x)}{\partial y} dxdy = \iint_D 2dxdy.$$

Vi kan sedan beräkna att

$$\begin{aligned}\iint_D 2dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_{\sin x}^{2+\cos x} 2dy \right) dx = 2\int_0^\pi (2 + \cos x - \sin x)dx \\ &= 2(2x + \sin x + \cos x)\Big|_0^\pi = 4\pi - 4.\end{aligned}$$

2.

Betrakta en enkel sammanhängande mängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ och en kontinuerligt deriverbart vektorfält $\mathbf{F} \colon \Omega \to \mathbf{R}^3$.

(a) Bevisa följande påstående.

rot $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ i varje punkt $\mathbf{x} \in \Omega \implies \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för alla slutna C^1-kurvor γ i Ω.

(b) Vad kan gå fel med ditt bevis i (a) om Ω inte är en enkel sammanhängande mängd?

Solution:

(a) Varje C^1-kurva i en enkel sammanhängande mängd är randen till delmängd av Ω. Låt D vara delmängden av Ω som har randen γ. Vi kan beräkna med hjälp av Stokes sats att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ i } D}}{=} \iint_D \mathbf{0} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = 0.$$

(b) Om Ω inte är en enkel sammanhängande mängd kan D hamnar utanför Ω, och vi vet inte att $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ där.

3.

Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som är definierad enligt formeln

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (6xy^2 - 3x^2)\mathbf{i} + (y^2 + 6x^2y)\mathbf{j}.$$

Avgör med bevis om $\mathbf{F}$ är ett potentialfält eller inte.

Solution:

Funktionen $\mathbf{F}$ är en C^1 funktion och är definierad i en enkel sammanhängande mängd. Därför är den en potentialfält om och endast om $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Vi beräknar att

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0, 0, \partial(y^2+6x^2y)/\partial x - \partial(6xy^2-3x^2)/\partial y) = (0, 0, 12xy-12xy) = (0, 0, 0)$$

och därför är $\mathbf{F}$ ett potentialfält.

4.

Betrakta ytan $S = \{(x, y, z)\colon y = 12 - x^2 - z^2, y \geq 3\}$ orienterad så att enhets normalen $\hat{\mathbf{n}}$ har en positiv y-komponent. Beräkna

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

där

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + 5z, e^x \cos(yz), x^2y).$$

Solution:

Låt $\Gamma = \{(x, y, z)\colon x^2 + z^2 = 9, y = 3\}$ orienterad moturs sett från $(0, 12, 0)$. Enligt Stokes sats är

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Vi parametriserar Γ med $\mathbf{u}(t) = (3\sin t, 3, 3\cos t)$ för $t \in [0, 2\pi)$ och därför är

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (54\cos t \sin t + 15\cos t, e^{3\sin t}\cos(9\cos t), 27\sin^2 t) \cdot (3\cos t, 0, -3\sin t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} 162\cos^2 t \sin t + 45\cos^2 t - 81\sin^3 t dt = 45\pi.\end{aligned}$$

5.

Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$. Man kan lätt kontrollera att

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 1.$$

Använd $\mathbf{F}$ och Gauss sats för att beräkna volymen av

$$M = \{(x, y, z)\colon 3x^2 + 3y^2 - 16 < z < 9 - x^2 - y^2\}.$$

Solution:

Enligt Gauss sats är volymen av M lika med

$$\iint_M \operatorname{div} \mathbf{F} dxdydz = \iint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ är normalen som pekar utåt från M. Vi delar $\partial M = S_1 \cup S_2$ där S_1 parametriseras med $\mathbf{u}_1(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$ och S_2 parametriseras med $\mathbf{u}_2(x, y) = (x, y, 3x^2 + 3y^2 - 16)$ för $x^2 + y^2 \leq 25/4$. Med dessa parametriseringar är

$$\iint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, d\sigma - \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2\, d\sigma$$

där $\hat{\mathbf{n}}_1$ och $\hat{\mathbf{n}}_2$ är normalerna inhämtade från $\mathbf{u}_1$ respektive $\mathbf{u}_2$. Vi räknar

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, d\sigma &= \frac{1}{3} \iint_{x^2+y^2 \leq 25/4} (x, y, 9 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dxdy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{5/2} (r^2 + 9) r dr d\theta = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{r^4}{4} + \frac{9r^2}{2} \right]_0^{5/2}\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2\, d\sigma &= \frac{1}{3} \iint_{x^2+y^2 \leq 25/4} (x, y, 3x^2 + 3y^2 - 16) \cdot (-6x, -6y, 1) dxdy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{5/2} (-3r^2 - 16) r dr d\theta = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{3r^4}{4} - \frac{16r^2}{2} \right]_0^{5/2}\end{aligned}$$

så volymen av M är

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, d\sigma - \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2\, d\sigma = \frac{2\pi}{3} \left[r^4 + \frac{25r^2}{2} \right]_0^{5/2} = \frac{625\pi}{8}$$

6.

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + 4x^2z\mathbf{k}$ ut ur randen till $V = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 5\}$.

Solution:

Vi tillämpar Gauss sats för att få

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dxdydz \\ &= \iiint_V (y^2 + 3y^2 + 4x^2) dxdydz \\ &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} \left(\int_0^5 (4y^2 + 4x^2) dz \right) dxdy \\ &= 20 \iint_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} (y^2 + x^2) dxdy \\ &= 20 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \rho^2 \rho d\rho \right) d\phi = 20 \cdot 2\pi \cdot 4 = 160\pi.\end{aligned}$$
