TATA44/TEN1 **Tentamen, 2021-10-25**

Vektoranalys

1. Beräkna arean av den del av planet $2x + 2y + z = 1$ som är innanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

Lösning:
Planet skär paraboloiden då $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 1$, vilket ger $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 3$. I de punkter som är innanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$ är $z \geq x^2 + y^2$, och i de punkter på planet $2x + 2y + z = 1$ som är innanför paraboloiden har vi $z = 1 - 2x - 2y \geq x^2 + y^2$. Av detta följer att $x^2 + 2x + y^2 + 2y \leq 1$ och således är $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 3$. Definiera

$$D = \{(x, y) \colon (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 3\}.$$

Då söker vi arean av ytan

$$S = \{(x, y, z) \colon 2x + 2y + z = 1,\ (x, y) \in D\}.$$

Parametrisera ytan S genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (1 - 2x - 2y)\,\mathbf{k},\quad (x, y) \in D.$$

Vi har $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (\mathbf{i} - 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Den sökta arean är då

$$A = \iint_S d\sigma = \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|\, dxdy = 3 \iint_D dxdy = 9\pi$$

eftersom $\iint_D dxdy$ är arean av området D, som är en cirkelskiva med radie $\sqrt{3}$.

---

2. Beräkna ytintegralen

$$\iint_S \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\, d\sigma,$$

där S den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ som är innanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Lösning: Insättning av $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ vilket ger $2z^2 = 2$, det vill säga $z = 1$ eftersom $z \geq 0$. Då är $S : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ z \geq 1$. Inför sfäriska koordinater (r, θ, ϕ). På S är $r = \sqrt{2}$ och $0 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Sätt $D : 0 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta, \phi) = \sqrt{2}\,\hat{\mathbf{r}}$ med $(\theta, \phi) \in D$. En standardräkning ger

$$\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = 2 \sin\theta\, \hat{\mathbf{r}},$$

av vilket det följer att

$$\left|\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right| = 2 \sin\theta.$$

Vi har då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,d\sigma &= \iint_D \frac{1}{3}\left|\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right|\,d\theta d\phi \\
&= \frac{2}{3}\iint_D \sin\theta\,d\theta d\phi \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\phi\right)d\theta \\
&= \frac{4\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{4\pi}{3}\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\
&= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left[\sqrt{2}-1\right].
\end{aligned}
$$

---

3. Betrakta ytan

$$S = \{(x,y,z)\colon z = 4-4x^2-y^2, z \geq 0\},$$

orienterad så att normalen har en icke-negativ z-komponent, och vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3, e^{y^2}+x, ze^{xy}).$$

Beräkna

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma.$$

[Tips: Skriv om integralen till en integral över en annan yta.]

Lösning: En standardberäkning ger att $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = zxe^{xy}\mathbf{i} - yze^{xy}\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Vi kan använda Stokes sats två gånger för att se

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{S'} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$$

där $\gamma = \{(x,y,z)\colon 4x^2+y^2 = 4, z=0\}$ och $S' = \{(x,y,z)\colon 4x^2+y^2 \leq 4, z=0\}$.

En annan standardberäkning ger att $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{k}$ och $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}$ på S', så

$$\iint_{S'} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \iint_{4x^2+y^2\leq 4} dxdy = 2\pi.$$

Alternativt kan man parametrisera S' med $\mathbf{r}(\rho,\phi) = (\rho\cos\phi, 2\rho\sin\phi, 0)$ för $0<\rho<1$ och $0<\phi<2\pi$. Då är

$$\iint_{S'} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathbf{k}\cdot(2\rho\mathbf{k})\,d\rho d\phi = 2\pi.$$

---

4. Definitionsmängden för vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x+xy^2}{y^2}, -\frac{x^2+1}{y^3}, 0\right)$$

är $D = \{(x,y,z)\colon y \neq 0\}$.

(a) Hitta en potential för $\mathbf{F}$.

(b) Beräkna arbetet

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där γ är en kurva i D från punkten $(0,1,3)$ till $(1,1,2)$.

Lösning:

(a) Vi leter efter ett ϕ sådant att $\nabla\phi = \mathbf{F}$. Eftersom $\phi'_x(x,y,z) = \frac{x+xy^2}{y^2}$ måste $\phi(x,y,z) = \frac{x^2+x^2y^2}{2y^2} + g(y,z)$ så

$$\phi'_y(x,y,z) = \frac{(2y^2)(2x^2y) - (x^2+x^2y^2)(4y)}{4y^4} + g'_y(y,z) = -\frac{x^2}{y^3} + g'_y(y,z)$$

och vi måste ha $g'_y(y,z) = -1/y^3$. Därför är $g(y,z) = 1/(2y^2) + h(z)$. Men eftersom $\phi'_z = 0$ är $h'(z) = 0$ så

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2+x^2y^2+1}{2y^2}$$

är en potential till $\mathbf{F}$. (Ditt svar kan förstås skilja sig åt med en konstant.)

(b) Vi kan använda potentialen för att beräkna

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(1,1,2) - \phi(0,1,3) = \frac{1+1+1}{2} - \frac{0+0+1}{2} = 1.$$

---

5. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x, 2y, 4z)$$

ut genom randen av kuben $Q = \{(x,y,z)\colon |x| \le 2, |y| \le 2, |z| \le 2\}$.

Lösning: Enligt Gauss sats kan vi beräkna att

$$\begin{aligned}\iint_{\partial Q} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma &= \iint_Q \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 3+2+4\, dxdydz \\ &= (3+2+4)4^3 = 576.\end{aligned}$$

---

6. Bektrakta vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2}, 0\right)$$

(a) Beräkna rotationen av $\mathbf{F}$.

(b) Beräkna

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

där γ är skärningskurvan mellan konen $x^2+y^2=z^2$ och planet $x+2z=1$ orienterad moturs sett från $(-\frac{1}{3},0,9)$.

Lösning:

(a) Vi beräknar att

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) &= 0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)\right)\mathbf{k}\\ &= \left(\frac{(x^2+y^2)-(x+y)2x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x^2+y^2)+(x-y)2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\mathbf{k}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

för $(x,y)\neq(0,0)$.

(b) Skärningskurvan mellan konen $x^2+y^2=z^2$ och planet $x+2z=1$ är en kurva med ekvationerna

$$\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{1}{3}\quad\text{och}$$
$$x+2z=1.$$

Ta ytan S lika med en "strumpa" som inte skär z-axeln och har randkurvorna γ och γ_0, där $\gamma_0=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2=1, z=0\}$, och orientera γ_0 moturs sett från $(0,0,9)$.

Enligt Stokes sats är

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\gamma_0}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma\\ &= \int_{\gamma_0}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

Vi kan till exempel parametrisera γ_0 med $\mathbf{r}(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,0)$ för $\theta\in[0,2\pi]$. Så

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}(\cos\theta-\sin\theta,\cos\theta+\sin\theta,0)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\sin^2\theta+\cos^2\theta d\theta=2\pi.\end{aligned}$$
