**Vektoranalys**

**1.** Beräkna arbetet

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

som utförs av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$$

längs kurvan $\gamma$ som är cirkeln på sfären $x^2+y^2+z^2=1$ med $z=1/2$ orienterad medurs sett från origo.

---

**Lösning:**

Kurvan $\gamma$ är en cirkel som uppfyller $z=1/2$ och $x^2+y^2+1/4=1$, så vi kan parametrisera den med

$$\mathbf{r}(\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \frac{1}{2}\right) \quad \text{för } 0\le\theta<2\pi.$$

Så

$$\mathbf{r}'(\theta) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, 0\right)$$

och

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}\sin^2\theta, \frac{3}{4}\sin^2\theta, \frac{3}{4}\sin^2\theta\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, 0\right)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}\sin^2\theta, \frac{3}{4}\sin^2\theta, \frac{3}{4}\sin^2\theta\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, 0\right)d\theta\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta + \sin^2\theta\cos\theta d\theta = 0\end{aligned}$$

---

**2.** Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = ye^z\mathbf{i} + yz\mathbf{k}$$

ut genom begränsningsytan $S$ till tetraedern

$$V = \{(x,y,z)\colon x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+2y+z\le 4\}.$$

---

**Lösning:** Genom en tillämpning av Gauss sats kan vi beräkna

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}dxdydz &= \int_0^2\left(\int_0^{4-2y}\left(\int_0^{4-2y-z} ydx\right)dz\right)dy\\ &= \int_0^2\left(\int_0^{4-2y}(4-2y-z)\,ydz\right)dy\\ &= \int_0^2\left((4-2y)^2 - \frac{(4-2y)^2}{2}\right)ydy\\ &= \int_0^2\frac{(4-2y)^2}{2}ydy = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

**3.** Använd Greens sats för att beräkna arbete som görs av kraften

$$\mathbf{F}(x, y) = -2y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

längs kurvan $\gamma$ med parametriseringen

$$r(t) = (2\cos t, \sin t) \quad \text{för } t \in [0, 2\pi]$$

**Lösning:** Greens sats säger att

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy,$$

där $\partial D = \gamma$ är orienterad moturs. Så vi tillämpar den med $Q(x, y) = x$ och $P(x, y) = -2y$:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint_D 1 + 2dxdy$$

där $D = \{(x, y) \colon x^2/4 + y^2 \leq 1\}$, så $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 6\pi$.

**4.**
Låt $S = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ vara en sfär med en given radie $a > 0$.

(a) Beräkna $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$.

(b) Beräkna $\iint_S z^2 d\sigma$.

**Lösning:**

(a) Vi parametriserar ytan $S$ med $\mathbf{u}(\theta, \varphi) = (a \sin\theta \cos\varphi, a \sin\theta \sin\varphi, a \cos\theta)$ där $\theta \in [0, \pi]$ och $\varphi \in [0, 2\pi]$. Då är $\mathbf{u}'_\theta(\theta, \varphi) = (a \cos\theta \cos\varphi, a \cos\theta \sin\varphi, -a \sin\theta)$ och $\mathbf{u}'_\varphi(\theta, \varphi) = (-a \sin\theta \sin\varphi, a \sin\theta \cos\varphi, 0)$ så

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi a^4.$$

(b) Enligt symmetri är $\iint_S x^2 d\sigma = \iint_S y^2 d\sigma = \iint_S z^2 d\sigma$ så utifrån (a) ser vi att

$$\iint_S z^2 d\sigma = \frac{4\pi a^4}{3}.$$

**5.** Betrakta en enkel sammanhängande mängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ och en kontinuerligt deriverbart vektorfält $\mathbf{F} \colon \Omega \to \mathbf{R}^3$.

(a) Bevisa följande påstående.

rot $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ i varje punkt $\mathbf{x} \in \Omega \implies \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för alla slutna $C^1$-kurvor $\gamma$ i $\Omega$.

(b) Vad kan gå fel med ditt bevis i (a) om $\Omega$ inte är en enkel sammanhängande mängd?

---

**Lösning:**

(a) Varje $C^1$-kurva i en enkel sammanhängande mängd är randen till delmängd av $\Omega$. Låt $D$ vara delmängden av $\Omega$ som har randkurvan $\gamma$. Vi kan beräkna med hjälp av Stokes sats att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma \underset{\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ i } D}{\overset{\uparrow}{=}} \iint_D \mathbf{0} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = 0.$$

(b) Om $\Omega$ inte är en enkel sammanhängande mängd kan vi inte garantera att $D$ är en delmängd av $\Omega$, och vi vet inte att $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ utanför $\Omega$.

---

**6.**

Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som är definierad enligt formeln

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (6yz^2 - 3y^2)\mathbf{j} + (z^2 + 6y^2 z)\mathbf{k}.$$

Avgör med bevis om $\mathbf{F}$ är ett potentialfält eller inte.

---

**Lösning:**

Funktionen $\mathbf{F}$ är en $C^1$ funktion och är definierad i en enkel sammanhängande mängd. Därför är den en potentialfält om och endast om $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Vi beräknar att

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (\partial(z^2+6y^2z)/\partial y - \partial(6yz^2-3y^2)/\partial z, 0, 0) = (12yz-12yz, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

och därför är $\mathbf{F}$ ett potentialfält.

---