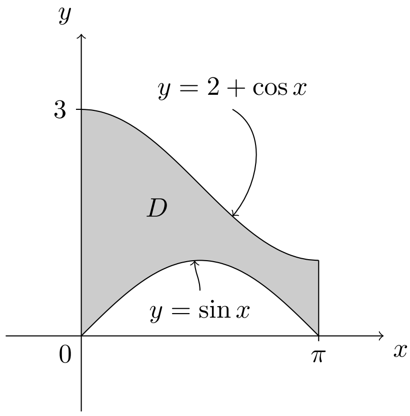
Vektoranalys

1. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F}(x,y) = e^x\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ och γ är randkurvan till området D i figuren nedan orienterad moturs.



Lösning: Vi tillämpar Greens sats för att se att

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma e^x dx + 2x dy = \iint_D \frac{\partial(2x)}{\partial x} - \frac{\partial(e^x)}{\partial y} dxdy = \iint_D 2dxdy.$$

Vi kan sedan beräkna att

$$\iint_D 2dxdy = \int_0^\pi \left(\int_{\sin x}^{2+\cos x} 2dy\right) dx = 2\int_0^\pi (2+\cos x - \sin x)dx$$
$$= 2(2x + \sin x + \cos x)\big|_0^\pi = 4\pi - 4.$$

---

2. Beräkna arean av en ellips i planet med storradie a och lillradie b. Det vill säga beräkna arean av mängden i xy-planet som bildas av punkterna (x,y) som uppfyller olikheten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Lösning:

Vi börjar genom att parametrisera ellipsen E med funktionen

$$\mathbf{r}(\rho,\phi) = (a\rho\cos\phi, b\rho\sin\phi, 0)$$

för $0 \leq \rho \leq 1$ och $0 \leq \phi \leq 2\pi$, och därmed tolkar det som inbäddad i $\mathbf{R}^3$. Vi beräknar sedan att

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (a\cos\phi, b\sin\phi, 0) \quad \text{och} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (-a\rho\sin\phi, b\rho\cos\phi, 0),$$

så

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right| = ab\rho.$$

Arean av E är därför

$$\iint_E d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} ab\rho d\phi d\rho = \pi ab.$$

---

3. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x\sqrt{x^2+y^2}, y\sqrt{x^2+y^2}, 0\right)$$

ut genom begränsningsytan till volymen

$$V = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \le 4, |z| \le 1, y > 0\}.$$

Lösning:

Enligt Gauss sats är flödet

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}dxdydz.$$

Därför beräknar vi att

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2},$$

så vi ser genom att byta till polärakoordinator att flödet är

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}dxdydz = \int_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^{\pi} 3\rho\,\rho d\phi dz d\rho = 16\pi.$$

4.

Avgör med bevis om följande vektorfält definierad i hela xyz-rummet är potentialfält eller inte.

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, z^2, z^2+y+x)$

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = f(\rho)\mathbf{e}_\rho$

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = \rho^3\mathbf{e}_\phi$

Här är f en kontinuerligt deriverbart funktion.

Lösning:

Eftersom alla vektorfält $\mathbf{F}$ är kontinuerligt deriverbara och definierade i en enkelt sammanhängande mängd räcker det att kontrollera om $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ eller inte.

(a) $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial z^2}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z}, \frac{\partial x^2}{\partial z} - \frac{\partial z^2}{\partial x}, \frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y}\right) = \mathbf{0}$

(b) $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (1-2z, 0-1, 0-2y) \neq \mathbf{0}$

(c) $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(\rho) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

(d) $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho^4 & 0 \end{vmatrix} = 4\rho^2\mathbf{e}_z$

Därför är vektorfälten i (a) och (c) potentialfält, men inte de i (b) och (d).

---

5. Betrakta funktionen $\mathbf{F}(x,y,z) = e^{y+z}\mathbf{e}_z$ och randen (eller begränsningsytan) $S = \partial V$ till volymen

$$V = \{(x,y,z)\colon 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 4, 0 \le z \le 5\}.$$

Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom S där S är orienterad så att normalen $\mathbf{n}$ pekar ut från V.

Lösning: Enligt Gauss sats är flödet

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz = \int_0^1\int_0^4\int_0^5 e^y e^z dzdydx$$
$$= (e^5-1)(e^4-1).$$

6.

Betrakta ytan $S = \{(x,y,z)\colon y = 10 - x^2 - z^2, y \ge 1\}$ orienterad så att enhets normalen $\hat{\mathbf{n}}$ har en positiv y-komponent. Beräkna

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$$

där

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz + 5z, e^x\cos(yz), x^2y).$$

Lösning:

Låt $\Gamma = \{(x,y,z)\colon x^2+z^2 = 9, y = 1\}$ orienterad moturs sett från $(0,10,0)$. Enligt Stokes sats är

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Vi parametriserar Γ med $\mathbf{u}(t) = (3\sin t, 1, 3\cos t)$ för $t \in [0,2\pi)$ och därför är

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi}(18\cos t\sin t + 15\cos t, e^{3\sin t}\cos(3\cos t), 9\sin^2 t)\cdot(3\cos t, 0, -3\sin t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 54\cos^2 t\sin t + 45\cos^2 t - 27\sin^3 t dt = 45\pi$$
