Vektoranalys

1.

(a) Identifiera vilken eller vilka av följande funktioner är vektorfält och vilken eller vilka är skalärfält:

(i) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
(ii) $g(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$; och
(iii) $h(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2}(\sin x, \tan y + e^z, xyz)$.

(b) Ge ett exempel av en fysikalisk storhet som kan representeras av ett vektorfält.

(c) En kurva parametriseras av funktionen $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Ge en tangentvektor till kurvan i punkten $(1, 0, 2\pi)$.

Lösning:

(a) (i) ett skalärfält;
(ii) ett vektorfält; och
(iii) ett vektorfält.

(b) Hastigheten av en vätska i en behållare, gravitationskraften i solsystemet, elektriska fält, magnetfält, med flera.

(c) Vi kan beräkna att $\gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$ och $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, så $\gamma'(2\pi) = (0, 1, 1)$ är en tangentvektor till kurvan i punkten $(1, 0, 2\pi)$.

2.

Betrakta ytan $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ och låt $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara ett vektorfält som ges av formeln

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-e^x \cos y, e^x \sin y, z^6)$$

för alla $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom S orienterad med en normal som pekar bort från origo.

Lösning:

Vi kan använda oss av Gauss sats för att räkna ut flödet. Låt V vara klotet med randen S. Då är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dxdydz = \iiint_V (-e^x \cos y + e^x \cos y + 6z^5) dxdydz$$

$$= \iiint_V 6z^5 dxdydz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 6z^5 dz \right) dxdy = 0.$$

---

3. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x\sqrt{x^2+y^2}, y\sqrt{x^2+y^2}, 0\right)$$

ut genom begränsningsytan till volymen

$$V = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \leq 4, |z| \leq 1, y > 0\}.$$

Lösning:

Enligt Gauss sats är flödet

$$\iint_{\partial V} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}dxdydz.$$

Därför beräknar vi att

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2},$$

så vi ser genom att byta till polärakoordinator att flödet är

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}dxdydz = \int_0^2\int_{-1}^1\int_0^\pi 3\rho\,\rho d\phi dz d\rho = 16\pi.$$

4.

Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(\rho,\phi,z) = \rho^n\,\mathbf{e}_\rho$ (som ges i cylindriska koordinater) för $\rho > 0$ och ett heltal n.

(a) Beräkna $\operatorname{div}\mathbf{F}$.

(b) Beräkna $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}$.

(c) För vilka n löser $\mathbf{F}$ ekvationen $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} = \mathbf{0}$?

Lösning:

(a)

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho^n\rho)}{\partial\rho} = (n+1)\rho^{n-1}$$

(b)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial((n+1)\rho^{n-1})}{\partial\rho}\,\mathbf{e}_\rho = (n+1)(n-1)\rho^{n-2}\,\mathbf{e}_\rho$$

(c) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} = (n+1)(n-1)\rho^{n-2}\,\mathbf{e}_\rho = \mathbf{0}$ om och endast om $n = \pm 1$.

---

5. Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right).$$

och skalärfältet

$$\phi(x,y,z) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

(a) Beräkna rotationen av $\mathbf{A}$.

(b) Är $\mathbf{A}$ ett potentialfält med potential ϕ?

Lösning:

(a) $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)k = \mathbf{0}$.

(b) Vi kan räkna ut att $\nabla\phi = \mathbf{A}$ när båda funktionerna är definierade, men $\mathbf{A}$ är definierade på alla punkter där $x^2 + y^2 \neq 0$ och ϕ är definierad på den mindre mängden där $y \neq 0$, så ϕ inte är ett potential till $\mathbf{A}$.

Svaret på del (a) medför inte att $\mathbf{A}$ är ett potentialfält, eftersom $\mathbf{A}$:s definitionsmängd inte är en enkel sammanhängande mängd.

---

6. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

och Γ är skärningskurvan mellan planet $x+2y+3z = 10$ och cylindern $x^2+y^2 = 2$. Kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(0,0,17)$. Motivera noga!

Lösning:

En standardräkning ge

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

i alla punkter där $x^2 + y^2 \neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $x^2 + y^2 = 2,\ z = 0$. Kurvan $\Gamma \cup \Gamma_1$ utgör randen till en yta S (ett ben på en leggings) på vilken $\mathbf{A}$ är C^1 och $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Enligt Stokes Sats har vi

$$\int_{\Gamma\cup\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = 0$$

och av detta följer det att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

där Γ och Γ_1 genomlöps i samma positiva riktning (d.v.s. moturs sett från $(0,0,17)$). Vi parametriserar Γ_1 genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\phi) = 2\cos\phi\,\hat{x} + 2\sin\phi\,\hat{y}$$

med $\phi : 0 \to 2\pi$. Vi får nu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) = \left(\frac{-2\sin\phi}{4}, \frac{2\cos\phi}{4}, 0\right)$$

och

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{-\sin\phi}{2} \\ \frac{\cos\phi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2\sin\phi \\ 2\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$
