TATA44/TEN1 **Tentamen, 2023-01-04**

Vektoranalys

1.
Ange för varje påståenden nedan om påståendet är sant eller falsk.

(a) Låt γ_1 och γ_2 vara två parametriseringar av samma kurvan. Det vill säga γ_1 och γ_2 har samma värdemängd. Om $\mathbf{F}$ är en kontinuerligt vektorfält är $\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

(b) Om en vektorfält är i varje punkt på en C^1-kurva normal till kurvan gör vektorfältet inget arbete längs kurvan.

(c) Om $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ är $\mathbf{F}$ en potentialfält.

Lösning:

(a) Falsk. Om γ_1 och γ_2 har olika orientationer är $\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

(b) Sant.

(c) Falsk. Det finns exempel i icke enkel sammanhängande mängder som uppfyller $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ men inte är potentialfält.

---

2. Betrakta följande två parametriseringar:

$$\mathbf{u}(s,t) = (s\cos t, s\sin t, 3s^2) \quad \text{för } 0 \le s \le 2 \text{ och } 0 \le t \le 2\pi;$$
$$\mathbf{v}(s,t) = (2s\cos t, 2s\sin t, 12s^2) \quad \text{för } 0 \le s \le 1 \text{ och } 0 \le t \le 4\pi.$$

(a) Beskriv ytan som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ parametriserar som en ekvation i kartesiska koordinater (x, y och z).

(b) Beräkna

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{u}(s,t))\cdot \mathbf{u}'_s \times \mathbf{u}'_t \, dsdt \quad \text{och}$$
$$\int_0^{4\pi}\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{v}(s,t))\cdot \mathbf{v}'_s \times \mathbf{v}'_t \, dsdt,$$

där $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, z^2)$, och förklara resultaten.

Lösning:

(a) För $\mathbf{u}$ ser vi att

$$x^2 + y^2 = (s\cos t)^2 + (s\sin t)^2 = s^2 = \frac{z}{3}$$

och gränserna motsvarar $x^2 + y^2 \le 4$.

För $\mathbf{v}$ ser vi att

$$x^2 + y^2 = (2s\cos t)^2 + (2s\sin t)^2 = 4s^2 = \frac{z}{3}$$

och gränserna motsvarar $x^2 + y^2 \le 4$.

Därmed parametriserar $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samma ytan.

(b) Vi beräknar

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'_s \times \mathbf{u}'_t &= (\cos t, \sin t, 6s) \times (-s\sin t, s\cos t, 0)\\ &= (-6s^2\cos t, -6s^2\sin t, s)\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{u}(s,t))\cdot \mathbf{u}'_s \times \mathbf{u}'_t dsdt &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (s\sin t, -s\cos t, 9s^4)\cdot(-6s^2\cos t, -6s^2\sin t, s)dsdt\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 9s^5 dsdt = \left[\frac{18\pi s^6}{6}\right]_0^2 = 192\pi.\end{aligned}$$

Vad gäller $\mathbf{v}$ kan vi beräkna att

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_s \times \mathbf{v}'_t &= (2\cos t, 2\sin t, 24s) \times (-2s\sin t, 2s\cos t, 0)\\ &= (-48s^2\cos t, -48s^2\sin t, 4s)\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}\int_0^{4\pi}\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{v}(s,t))\cdot \mathbf{v}'_s \times \mathbf{v}'_t dsdt &= \int_0^{4\pi}\int_0^1 (2s\sin t, -2s\cos t, 144s^4)\cdot(-48s^2\cos t, -48s^2\sin t, 4s)dsdt\\ &= \int_0^{4\pi}\int_0^1 576s^5 dsdt = \left[\frac{2304\pi s^6}{6}\right]_0^1 = 384\pi.\end{aligned}$$

Andra integralen är två gånger första integralen eftersom $\mathbf{v}$ täcker ytan två gånger och $\mathbf{u}$ bara täcker den en gång.

---

3. Betrakta ytan $S = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 = 1, z \leq 0\}$ som är orienterad med en normal som pekar nedåt. Bekräfta att Stokes sats gäller för vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2y - z, x + y^2 - z, 4y - 3x).$$

och ytan S genom att beräkna båda integralerna i satsen.

Lösning: Låt γ vara randkurvan till S och parametriserar den med $\gamma(t) = (\cos t, -\sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Vi beräknar först

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} (-2\sin t, \cos t + \sin^2 t, -4\sin t - 3\cos t)\cdot(-\sin t, -\cos t, 0)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} 2\sin^2 t - \cos^2 t - \sin^2 t\cos t\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - 3\cos(2t)}{2} - \sin^2 t\cos t\,dt\\ &= \left[\frac{2t - 3\sin(2t)}{4} - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = \pi.\end{aligned}$$

Sedan kan vi också beräkna att

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (5, 2, -1)$$

och parametrisera S med $\mathbf{u}(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\theta)$ $(0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi/2)$. Därför är

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (5, 2, -1)\cdot(\sin^2\theta\cos\phi, -\sin^2\theta\sin\phi, -\cos\theta\sin\theta)\,d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} 5\sin^2\theta\cos\phi - 2\sin^2\theta\sin\phi + \cos\theta\sin\theta\,d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\,d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\,d\phi d\theta = \left[\frac{-\pi\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi.
\end{aligned}$$

Därför har vi bekräftat att

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

i det här fallet.

---

4. Låt $S = \{x, y, z)\colon z = e^{1-x^2-y^2}, z \ge 1\}$ vara orienterad så att normalen pekar uppåt. Använd Gauss sats för att beräkna

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

där $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 2 - 2z)$

Lösning: Vi beräknar att $\operatorname{div}\mathbf{F} = 1 + 1 - 2 = 0$, så enligt Gauss sats är

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

där $S' = \{x, y, z)\colon x^2 + y^2 \le 1, z = 1\}$ är orienterad med en normal som pekar uppåt. Vi parametriserar S' med

$$\mathbf{u}(s, t) = (s\cos t, s\sin t, 1) \quad \text{för } 0 \le s \le 1 \text{ och } 0 \le t < 2\pi,$$

så

$$\begin{aligned}
\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \int_0^1\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{u}(s, t))\cdot\mathbf{u}'_s\times\mathbf{u}'_t dsdt \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} (s\cos t, s\sin t, 2 - 2)\cdot(0, 0, s)dsdt = 0.
\end{aligned}$$

---

5. Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right).$$

och skalärfältet

$$\phi(x,y,z) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

(a) Beräkna rotationen av **A**.

(b) Är **A** ett potentialfält med potential ϕ?

Lösning:

(a) $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) k = \mathbf{0}$.

(b) Vi kan räkna ut att $\nabla\phi = \mathbf{A}$ när båda funktionerna är definierade, men **A** är definierade på alla punkter där $x^2+y^2 \neq 0$ och ϕ är definierad på den mindre mängden där $y \neq 0$, så ϕ inte är ett potential till **A**.

Svaret på del (a) medför inte att **A** är ett potentialfält, eftersom **A**:s definitionsmängd inte är en enkel sammanhängande mängd.

---

6. Formen av en tunn tråd beskrivs av parametriseringen

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \text{för } 0 \leq t \leq 3\pi.$$

Antar att temperaturen av tråden ges av funktionen

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 1.$$

Beräkna medeltemperaturen som definieras som

$$\frac{\int_\gamma f ds}{\text{längden av } \gamma} = \frac{\int_\gamma f ds}{\int_\gamma ds}.$$

Lösning: Vi beräknar att längden av γ är

$$\int_\gamma ds = \int_0^{3\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{3\pi} \sqrt{2} dt = 3\pi\sqrt{2}$$

och

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{3\pi} f(\gamma(t))|\gamma'(t)| dt = \int_0^{3\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + 2t^2 + 1)\sqrt{2} dt$$
$$= \sqrt{2} \int_0^{3\pi} 2 + 2t^2 dt = 6\pi\sqrt{2} + 18\pi^3\sqrt{2}.$$

Därför är medeltemperaturen

$$\frac{3\pi\sqrt{2} + 18\pi^3\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{2}} = 2 + 6\pi^2.$$
