Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA44
Modul: TEN1

Tentamen i TATA44 Vektoranalys

2023-10-24 kl. 14.00–19.00

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys.* 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar och information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida. Lycka till!

1. Beräkna ytintegralen $\iint_S x^2 z\, dS$ där S är den del av konen $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ som ligger mellan planen $z = 2$ and $z = 4$.

2. Beräkna den vinkel α som xy-planet bildar med tangentplanet till ytan $S : z = \rho^2 \sin 2\varphi$ i punkten $\rho = 1$, $\varphi = \pi/4$, $z = 1$ (cylinderkoordinter). Observera att $0 \le \alpha \le \pi/2$.

3. Betrakta vektorfälten

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2}\hat{x} + \frac{y}{x^2+y^2}\hat{y} \quad \text{och} \quad \mathbf{B}(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{x} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{y}.$$

   (a) Beräkna kurvintegraler $\oint_L \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$ och $\oint_L \mathbf{B} \bullet d\mathbf{r}$, där L är kurvan $x^2+y^2 = 4$, $z = 0$, orientering moturs sett från punkten $(0,0,5)$.

   (b) Avgör vilka av vektorfälten $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ som är potentialfält i $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 > 0\}$. Motivera noga!

4. Använd Stokes sats för att beräkna cirkulationen av vektorfältet $\mathbf{A}(x,y,z) = y^2\hat{x} + x^2\hat{z}$, det vill säga beräkna $\oint_\Gamma \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$, då den slutna kurvan Γ ges av kanterna på en triangel med hörn $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ samt $(0,0,1)$. Kurvan är positivt orienterad sett från punkten $(10,10,10)$. (**Notera** att Stokes sats skall användas: en direkt beräkning av kurvintegralen ger således inga poäng).

5. Betrakta vektorfältet $\mathbf{A}(x,y,z) = (\hat{x} \bullet \mathbf{r}) f(r)\mathbf{r}$, där r är beloppet av ortsvektorn: $r = |\mathbf{r}|$ och $f(r)$ är en obekant C^1-funktion. Bestäm $f(r)$ så att divergensen $\nabla \bullet \mathbf{A} = 0$ och $\mathbf{A}(1,0,0) = 2\hat{x}$.

6. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (4x - x^3)\hat{x} + (4y - y^3)\hat{y} + (4z - z^3)\hat{z}$. Beräkna det största (positiva) värdet som flödet $\oiint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$ antar, då S är en sluten yta med utåtriktad normal. Ange också för vilken sluten yta S, som detta maximum antas.

Formelbladet i vektoranalys

Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av:

$$\nabla\Phi(u,v,w) = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w h_u h_v)\right]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

För cylinderkoordinater: med $(u,v,w) = (\rho,\phi,z)$ har vi:

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1.$$

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \\
\hat{z} &= \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.
\end{aligned}$$

För sfäriska koordinater: med $(u,v,w) = (r,\theta,\phi)$ har vi:

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r\sin\theta.$$

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\
\hat{\theta} &= \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.
\end{aligned}$$

Vektorformler

1. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
3. $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$
4. $\nabla \cdot (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \cdot \mathbf{A} + \beta\nabla \cdot \mathbf{B}$
5. $\nabla \times (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \times \mathbf{A} + \beta\nabla \times \mathbf{B}$
6. $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$
7. $\nabla \cdot (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \mathbf{A} + \Phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$
8. $\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$
9. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
10. $\nabla \cdot (\nabla\Phi) = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater
11. $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$ för alla Φ
12. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter α, β, alla deriverbara skalärfält Φ, Ψ och alla deriverbara vektorfält $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.