Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA44
Modul: TEN1

Tentamen i TATA44 Vektoranalys

2024-01-03 kl. 8.00–12.00

Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys.* 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar och information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida. Lycka till!

1. Beräkna volymen av den delen av klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xz^2\,\hat{x} + yx^2\,\hat{y} + 2zy^2\,\hat{z}$ ut genom ytan $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 9$ med $z \leqslant 0$, i riktningen $\hat{z} \cdot \hat{n} > 0$.

3. Vilka av följande vektorfälten är potentialfält? (motivera noga!):

   (a) $\mathbf{A} = 2x\hat{x} + z\hat{z}$ i $D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

   (b) $\mathbf{B} = \rho\hat{\phi} + z\hat{z}$ (cylinderkoordinater) i $D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 3\}$;

   (c) $\mathbf{C} = \dfrac{1}{\rho}\hat{\phi}$ (cylinderkoordinater) i $D_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y > 1\}$.

4. Beräkna kurvintegralen $\oint_\Gamma \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$ där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn,
$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{y + 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1}\hat{x} - \frac{x}{x^2 + y^2 + 2y + 1}\hat{y}$$
och Γ är kurvan $3x^2 + y^2 = 16$ i xy-planet (kurvan genomlöps moturs).

5. Betrakta vektorfältet $\mathbf{A}(x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ och en obekant C^1-funktion $f(r)$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Bestäm $f(r)$ så att divergensen $\nabla \bullet (f(r)\mathbf{A}) = 1$ och $f(1) = 1$.

6. Beräkna ytintegralen
$$\oiint_S r^6\,(\mathbf{E} \times \mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S}$$
där $\mathbf{E} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{r}$ är ortsvektorn, $r = |\mathbf{r}|$ och S är ytan av en enhetssfär med centrum i punkten $(10, 10, 10)$ med utåtriktad normal.

Formelbladet i vektoranalys

Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av:

$$\nabla\Phi(u,v,w) = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w h_u h_v)\right]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

För cylinderkoordinater: med $(u,v,w) = (\rho,\phi,z)$ har vi:

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1.$$

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \\
\hat{z} &= \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.
\end{aligned}$$

För sfäriska koordinater: med $(u,v,w) = (r,\theta,\phi)$ har vi:

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r\sin\theta.$$

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\
\hat{\theta} &= \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.
\end{aligned}$$

Vektorformler

1. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
3. $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$
4. $\nabla \cdot (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \cdot \mathbf{A} + \beta\nabla \cdot \mathbf{B}$
5. $\nabla \times (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \times \mathbf{A} + \beta\nabla \times \mathbf{B}$
6. $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$
7. $\nabla \cdot (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \mathbf{A} + \Phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$
8. $\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$
9. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
10. $\nabla \cdot (\nabla\Phi) = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater
11. $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$ för alla Φ
12. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter α, β, alla deriverbara skalärfält Φ, Ψ och alla deriverbara vektorfält $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.