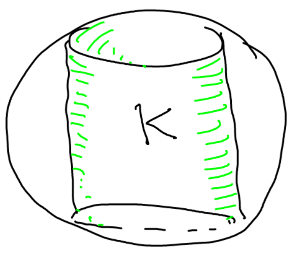
TATA44 / 3 jan 2024 / Lösningsförslag

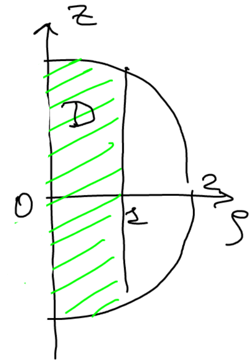
1 I cylindriska koordinater: $z^2+\rho^2\le 4$, $0\le\rho\le 1$



$h_\rho=h_z=1$, $h_\varphi=\rho$. alltså: $-\sqrt{4-\rho^2}\le z\le\sqrt{4-\rho^2}$

$$\mathrm{Vol}(K)=\iiint_K d\mathrm{Vol}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\,d\rho\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz=$$

$$=2\pi\cdot\int_0^1 2\rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho=\left/\begin{matrix}4-\rho^2=t\\-2\rho\,d\rho=dt\end{matrix}\right/=$$



$$=2\pi\int_3^4\sqrt{t}\,dt=2\pi\left[\frac{2t^{3/2}}{3}\right]_3^4=\frac{4\pi}{3}\left[8-3\sqrt{3}\right]$$

Alternativ lösning (med stavar).

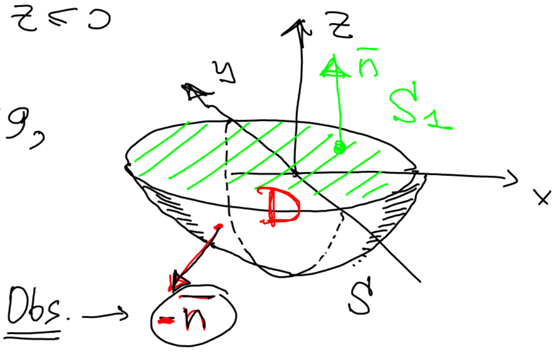
$$V(K)=\iint_{x^2+y^2\le 1}2\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 2\sqrt{4-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho=\frac{4\pi}{3}\left[8-3\sqrt{3}\right]$$

Svar: $\frac{4\pi}{3}\cdot\left[8-3\sqrt{3}\right]$

---

2 $\bar{F}(x,y,z)=2xz^2\hat{x}+yx^2\hat{y}+2zy^2\hat{z}$ är ett C^1-vektorfält i $\mathbb{R}^3$, och $\nabla\cdot\bar{F}=\mathrm{div}\bar{F}=2z^2+x^2+2y^2$. Ytan $S:\begin{cases}x^2+2y^2+2z^2=9\\ z\le 0\end{cases}$ är en halv ellipsoid, se bilden:

Låt S_1 vara ellipsen $z=0$, $x^2+2y^2\le 9$, med normalen $\hat{n}$: $\hat{n}\cdot\hat{z}>0$.



Obs

$$-\iint_S\bar{F}\cdot d\bar{S}+\iint_{S_1}\bar{F}\cdot dS=\iiint_D\mathrm{div}\bar{F}\,dx\,dy\,dz$$

Obs. att $\bar{F}\cdot d\bar{S}=\bar{F}\cdot\hat{z}\,dS=F_3\,dS=2zy^2\,dS=0$ längs S_1 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow-\iint_S\bar{F}\cdot d\bar{S}=\iiint_D(x^2+2y^2+2z^2)\,dx\,dy\,dz=\left|\begin{matrix}x=r\cos\varphi\sin\theta\\ y=r/\sqrt{2}\,\sin\varphi\sin\theta\\ z=r/\sqrt{2}\,\cos\theta\end{matrix}\quad\begin{matrix}\dfrac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)}=\dfrac{r^2}{2}\sin\theta\\ 0\le r\le 3,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\end{matrix}\right|$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^3\left(r^2\cdot\frac{r^2}{2}\sin\theta\right)dr=2\pi\cdot\left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cdot\left[\frac{r^5}{10}\right]_0^3=2\pi\cdot\frac{3^5}{10}=\frac{243\pi}{5}$$

Svar: $\boxed{-\frac{243}{5}\pi}$

③ a) $\bar{A} = (2x, 0, z)$ är ett C^1-vektorfält i $\mathbb{R}^3$,

$$\nabla \times \bar{A} = \text{rot}\,\bar{A} = \bar{0} \Rightarrow \bar{A} \text{ är ett potentiellt vektorfält i } D_1 \subset \mathbb{R}^3$$

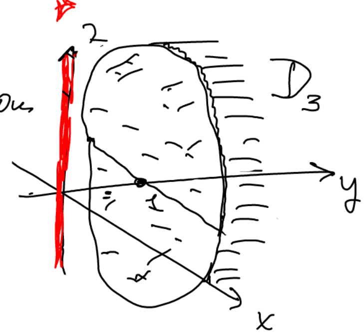
b) $\bar{B} = \rho\hat{\varphi} + z\hat{z}$ är ett C^1-vektorfält i D_2. Men:

$$\nabla \times \bar{A} = \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot \rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & \rho^2 & z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\hat{z} \cdot 2\rho = 2\hat{z} \neq 0,$$

alltså inget potentiellt vektorfält i D_2.

c) $\bar{C} = \frac{1}{\rho}\hat{\varphi}$ är ett C^1-vektorfält i D_3 (med singularitet $\begin{cases} x^2+y^2=\rho^2=0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$)

Observera ytterligare att D_3 är ett slutet halvrum alltså ett enkeltsammanhängande område. Dessutom



$$\nabla \times \bar{C} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{C} \text{ är ett potentiellt vektorfält i } D_3.$$

(potentialet = polära vinkeln φ, $y > 1$)

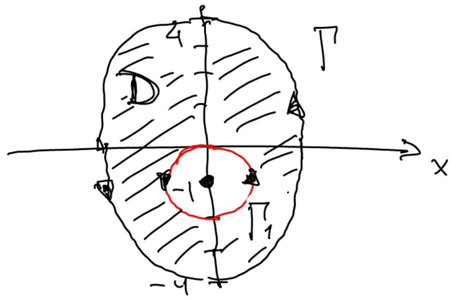
Svar: • $\bar{A}$ och $\bar{C}$: "ja".

• B "nej"

---

④ $\bar{A}(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2+(y+1)^2}\hat{x} - \dfrac{x}{x^2+(y+1)^2}\hat{y} = P(x,y)\cdot\hat{x} + Q(x,y)\,\hat{y}$ är ett C^1-vektorfält i $\mathbb{R}^2 \setminus (0,-1)$

$\Rightarrow P'_y - Q'_x = 0$ i alla punkter $(x,y) \neq (0,-1)$. Låt Γ_1 vara kurvan $x^2+(y+1)^2=1$ (cirkel) orienterad moturs, och låt D vara området mellan Γ och Γ_1:



$\Rightarrow \partial D = \Gamma + (-\Gamma_1)$, d.v.s.

$$\int_\Gamma \bar{A}\cdot d\bar{r} - \int_{\Gamma_1} \bar{A}\cdot d\bar{r} = \iint_D (P'_y - Q'_x)\,dxdy = 0.$$

$$\int_\Gamma \bar{A}\cdot d\bar{r} = \int_{\Gamma_1} \bar{A}\cdot d\bar{r} = \left/ \begin{array}{l} \Gamma_1: x = \cos t \\ \quad y = -1+\sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{array} \right/ = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin t, -\cos t)}_{\bar{A}} \cdot \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{d\bar{r}}\,dt = -2\pi$$

Svar: $\boxed{-2\pi}$

---

⑤ $\bar{A} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r\cdot\hat{r}$. Som är bekant:

$$\nabla\cdot(\varphi\bar{F}) = \varphi(\nabla\cdot\bar{F}) + \nabla\varphi\cdot\bar{F},$$ alltså

$$\nabla(f(r)\cdot\bar{A}) = f(r)\cdot(\nabla\cdot\bar{A}) + \nabla f(r)\cdot\bar{A} = f(r)\cdot 3 + f'(r)(\nabla r\cdot\bar{A}) =$$

$$= \Big/ \text{i sfäriska koordinater } \bar{A} = r\hat{r}, \ \nabla r = \hat{r}\cdot\frac{1}{1}\frac{\partial r}{\partial r} = \hat{r} \Big/ = 3f(r) + f'(r)\cdot r \overset{(\text{=})}{=} 1$$

Integrerande ~~factor~~: $3r^2 f(r) + f'(r)r^3 = r^2 \iff (f\cdot r^3)' = r^2 \iff$

$$f(r)\cdot r^3 = \frac{r^3}{3} + C \iff f(r) = \frac{1}{3} + \frac{C}{r^3}.$$

Eftersom $f(1) = 1$, $\frac{1}{3} + C = 1$, $C = \frac{2}{3} \Rightarrow f(r) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{r^3}\right)$

Svar: $f(r) = \frac{1}{3}(1 + 2r^{-3})$

---

6) Vectorfältet $\bar{F} = r^6(\bar{E}\times\bar{r})$ är C^1 i $\mathbb{R}^3$.

Formeln (9) i formelbladet ger

$\nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}(\nabla\times\bar{A}) - A(\nabla\times\bar{B})$, alltså

$\nabla\cdot(\bar{E}\times r^6\bar{r}) = \bar{E}(\nabla\times r^6\bar{r}) - r^6\bar{r}(\nabla\times E)$, där

(i) $\nabla\times r^6\bar{r} = \text{rot}(r^6\bar{r}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi}\\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ r^6 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0$

(ii) $\nabla\times\bar{E} = 0$ eftersom $E = \text{konst}$,

med andra ord, $\nabla\cdot(\bar{E}\times r^6\bar{r}) = 0$, och Gauss satsen ger

$$\oiint_S r^6(\bar{E}\times\bar{r})\cdot d\bar{S} = \iiint_D \nabla\cdot(\bar{E}\times r^6\bar{r})\,dxdydz = \underline{\underline{0}}.$$

Svar: 0.