

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2023-03-17 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. Bestäm Laurentserien för

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 4}$$

i följande områden: (a) $|z| > 2$ (b) $1 < |z - 1| < 3$. (1p+2p)

2. Beräkna

$$\int_C \frac{dz}{z^3 \cos z}$$

där C är cirkeln $|z - 1| = 2$ tagen ett varv i positiv led.

3. Bestäm alla hela analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att

$$u - v = e^y(\cos x + \sin x) + x^2 - 2xy - y^2 \quad \text{och} \quad f(0) = -i.$$

f ska uttryckas i variabeln z , alltså som $f(z)$.

4. Låt Ω vara området i z -planet utanför de båda cirklarna

$$C_1 : |z| = 1 \quad \text{och} \quad C_2 : |z - 4| = \sqrt{11/3}.$$

(a) Avbilda Ω på en cirkelring $1 < |w| < R$ med hjälp av en Möbiusavbildning $w(z)$. Ange speciellt radien R , förenklad så långt som möjligt. (2p)

(b) Bestäm den stationära temperaturfördelningen $T(z)$ (en harmonisk funktion) i Ω som uppfyller randvillkoren $T = 0$ på C_1 och $T = 100$ på C_2 . (1p)

5. Bestäm antalet nollställen som funktionen

$$f(z) = z^2 + e^{-z} + \pi^2$$

har i första kvadranten $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

6. Låt Ω vara \mathbb{C} med strålen $z = x \geq -1$ borttagen. Bestäm en gren $f(z)$ till den flervärda funktionen

$$\log(z^2 + z)$$

i Ω sådan att $f(-2) = \ln 2$. Beräkna sedan $f(i)$, $f(-1 - i)$, $f'(i)$ och $f'(-1 - i)$, alla i rektangulär form.

7. Bestäm alla $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ sådana att $\operatorname{Im} f(z) = 0$ precis på strålen $z = x \geq 0$.

TATA45 Komplex analys 2023-03-17, lösningsskisser

1. Att $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ när $|q| < 1$ ger följande utvecklingar i de två områdena:

$$(a) \quad \frac{z}{z^2 - 4} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - 4/z^2} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{z^{2n+1}}, \quad |z| > 2.$$

$$(b) \quad \frac{z}{z^2 - 4} = \frac{z}{(z+2)(z-2)} = \frac{1/2}{z+2} + \frac{1/2}{z-2} = \left/ \begin{array}{l} w = z - 1 \\ 1 < |w| < 3 \end{array} \right/ = \frac{1/2}{w+3} + \frac{1/2}{w-1}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1+w/3} + \frac{1}{2w} \cdot \frac{1}{1-1/w} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{3}\right)^n + \frac{1}{2w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{w}\right)^n$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{3^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}, \quad 1 < |z-1| < 3.$$

2. Sätt $f(z) = 1/(z^3 \cos z)$. Förutom i punkten $z = 0$ är denna funktion singularär där $\cos z = 0$, d.v.s. där $e^{2iz} = -1$, d.v.s. där $2iz = \log(-1) = i\pi + i2n\pi$, d.v.s. där $z = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Innanför $C : |z-1| = 2$ finns därför trippelpolen $z = 0$ och enkelpolen $z = \pi/2$.

Standardutvecklingarna $\cos z = 1 - z^2/2! + \mathcal{O}(z^4)$ och $(1-w)^{-1} = 1 + w + \mathcal{O}(w^2)$ ger

$$\frac{1}{z^3 \cos z} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1 - z^2/2 + \mathcal{O}(z^4)} = \left/ \begin{array}{l} w = z^2/2 + \mathcal{O}(z^4), \\ \mathcal{O}(w^2) = \mathcal{O}(z^4) \end{array} \right/$$

$$= \frac{1}{z^3} \left(1 + (z^2/2 + \mathcal{O}(z^4)) + \mathcal{O}(z^4) \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1/2}{z} + \mathcal{O}(z), \quad 0 < |z| < \pi/2,$$

så $\text{Res}_{z=0} f(z) = 1/2$.

Vidare,

$$\text{Res}_{z=\pi/2} f(z) = \frac{1/z^3}{\frac{d}{dz}(\cos z)} \Big|_{z=\pi/2} = \frac{1/z^3}{-\sin z} \Big|_{z=\pi/2} = -\frac{8}{\pi^3},$$

så residysatsen medför att

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{\pi^3} \right) = i \left(\pi - \frac{16}{\pi^2} \right) = \underline{\text{svar}}.$$

3. Derivering m.a.p. x respektive y och användning av Cauchy-Riemanns ekvationer $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} u'_x - v'_x = e^y(\cos x - \sin x) + 2x - 2y = u'_x + u'_y, \\ u'_y - v'_y = e^y(\cos x + \sin x) - 2x - 2y = u'_y - u'_x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x = -e^y \sin x + 2x & (1), \\ u'_y = e^y \cos x - 2y & (2). \end{cases}$$

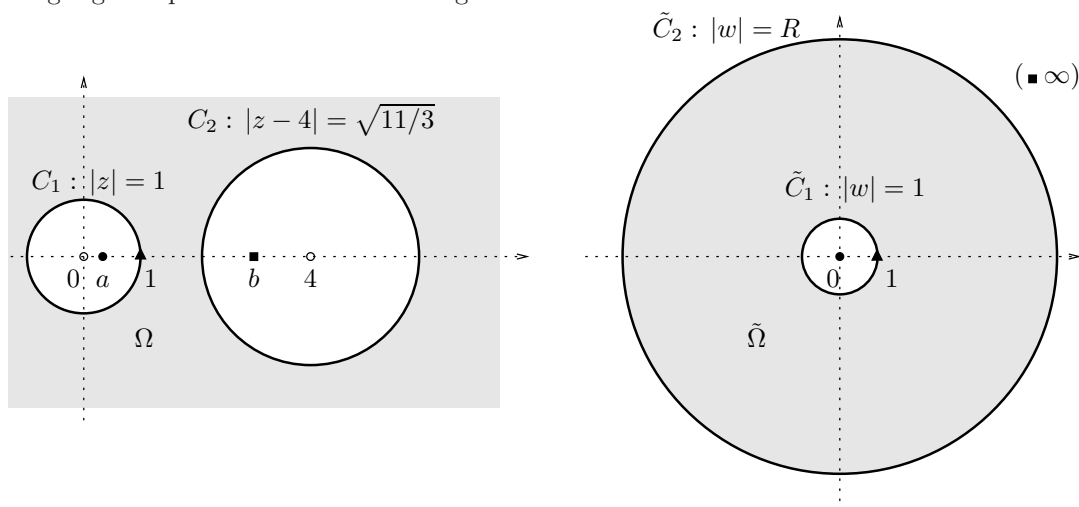
Integration av (1) m.a.p. x ger $u = e^y \cos x + x^2 + \varphi(y)$, där φ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Derivering m.a.p. y och insättning i (2) ger sedan $\varphi'(y) = -2y$, alltså $\varphi(y) = -y^2 + A$, där A är en reell konstant, och därmed $u = e^y \cos x + x^2 - y^2 + A$. Vi får sedan $v = u - (e^y(\cos x + \sin x) + x^2 - 2xy - y^2) = -e^y \sin x + 2xy + A$, så

$$f = u + iv = (e^y \cos x + x^2 - y^2 + A) + i(-e^y \sin x + 2xy + A), \quad A \in \mathbb{R}.$$

f är alltså en hel funktion, och på realaxeln $z = x$ är $f(x) = \cos x + x^2 + A - i \sin x + iA = e^{-ix} + x^2 + (1+i)A$. Sätt $g(z) = e^{-iz} + z^2 + (1+i)A$. Då är också g hel, och eftersom $f(x) = g(x)$ för alla reella x medför entydighetssatsen för analytiska funktioner att $f(z) = g(z)$ överallt. Kravet $f(0) = -i$ ger slutligen $A = -1$.

$$\underline{\text{Svar:}} \quad f(z) = e^{-iz} + z^2 - (1+i).$$

4. (a) Genom att med en Möbiusavbildning $w(z)$ avbilda de *gemensamma* spegelpunkterna m.a.p. C_1 och C_2 på $w = 0$ respektive $w = \infty$, som ju är de gemensamma spegelpunkterna m.a.p. alla cirklar med centrum i origo, kommer Ω att avbildas på en cirkelring med centrum i origo, enligt egenskaper hos Möbiusavbildningar.



Geometrin (se figur ovan) medför att de gemensamma spegelpunkterna är $z = a$ och $z = b$ för några reella tal a och b sådana att $0 < a < b < 4$. Vidare är

$$\begin{aligned}(a-0)(b-0) &= 1^2 = 1, \\ (4-a)(4-b) &= (\sqrt{11/3})^2 = 11/3,\end{aligned}$$

och detta system löses av $a = 1/3$, $b = 3$.

Om vi låter $w(1/3) = 0$ och $w(3) = \infty$, och kompletterar med att avbilda någon punkt på C_1 på någon punkt på enhetscirkeln $|w| = 1$, säg $w(1) = 1$, får vi via ansatsen $(w-0)/1 = k(z-1/3)/(z-3)$ avbildningen

$$w(z) = \frac{1-3z}{z-3}.$$

C_1 avbildas nu på $\tilde{C}_1 : |w| = 1$, och C_2 avbildas på någon cirkel $\tilde{C}_2 : |w| = R$, där R kan bestämmas genom att sätta in valfri punkt på C_2 , t.ex. $z = 4 + \sqrt{11/3}$, i $w(z)$:

$$R = |w(4 + \sqrt{11/3})| = \frac{11 + 3\sqrt{11/3}}{1 + \sqrt{11/3}} = \frac{(11 + 3\sqrt{11/3})(\sqrt{11/3} - 1)}{11/3 - 1} = 3\sqrt{11/3} = \sqrt{33}.$$

Ω avbildas därför på cirkelringen $\tilde{\Omega} : 1 < |w| < \sqrt{33}$.

- (b) Låt $w(z)$ och $\tilde{\Omega}$ vara som ovan. I ringen $\tilde{\Omega}$ finns harmoniska funktioner

$$T = A \ln |w| + B$$

som är konstanta på cirklar $|w| = r$. Kraven $T = 0$ då $|w| = 1$ och $T = 100$ då $|w| = \sqrt{33}$ ger $B = 0$ och sedan $A = 100/(\ln \sqrt{33}) = 200/(\ln 33)$, så

$$T(z) = \frac{200}{\ln 33} \ln |w(z)| = \frac{200}{\ln 33} \ln \left| \frac{1-3z}{z-3} \right|.$$

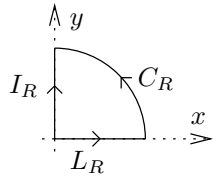
Svar: (a) $w(z) = \frac{1-3z}{z-3}$ (t.ex.), $R = \sqrt{33}$ (entydigt); (b) $T(z) = \frac{200}{\ln 33} \ln \left| \frac{1-3z}{z-3} \right|$ (entydigt).

5. Vi studerar argumenttillskottet för $f(z) = z^2 + e^{-z} + \pi^2$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = L_R + C_R - I_R$ (se figur nere till vänster).

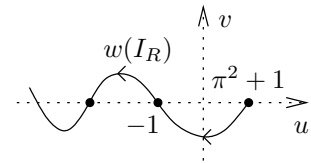
På L_R är $f(z) = f(x) = x^2 + e^{-x} + \pi^2 \geq \pi^2$ och därmed reellt och positivt, så $\Delta_{L_R} \arg f(z) = 0$.

På C_R noterar vi att $|e^{-z}| = e^{-x} \leq 1$, så $|(e^{-z} + \pi^2)/z^2| \leq (1 + \pi^2)/|z|^2 \rightarrow 0$ då $|z| \rightarrow +\infty$, varför $\Delta_{C_R} \arg f(z) = \Delta_{C_R} \arg z^2 + \Delta_{C_R} \arg(1 + (e^{-z} + \pi^2)/z^2) \rightarrow 2 \cdot \pi/2 + 0 = \pi$ då $R \rightarrow \infty$.

På I_R får vi $f(z) = f(iy) = (\pi^2 - y^2 + \cos y) + i(-\sin y) = u + iv$, $y : 0 \rightarrow R$, och därmed nedanstående tabell samt kurva $w = f(z)$ då z genomlöper I_R ; notera att $u(0) = \pi^2 + 1 > 0$, $u(\pi) = -1 < 0$ och $u(y) < 0$ för $y \geq 2\pi$.



y	0	$<$	π	$<$	2π	$<$
u	$+$	$?$	$-$	$?$	$-$	$-$
v	0	$-$	0	$+$	0	$?$
halvplan		u		ö		v



Dessutom gäller $u \rightarrow -\infty$ då $y \rightarrow \infty$, och eftersom $|v| \leq 1$ får vi att $v/u \rightarrow 0$ då $y \rightarrow \infty$, d.v.s. att u drar mer än v , så $\Delta_{I_R} \arg f(z) \rightarrow -\pi$ då $R \rightarrow \infty$. Antalet nollställen i första kvadranten blir därför $(1/2\pi) \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{L_R + C_R - I_R} \arg f(z) = (0 + \pi - (-\pi))/2\pi = 1$.

Svar: Ett.

6. Eftersom

$$\log(z^2 + z) = \log(z + 1) + \log z$$

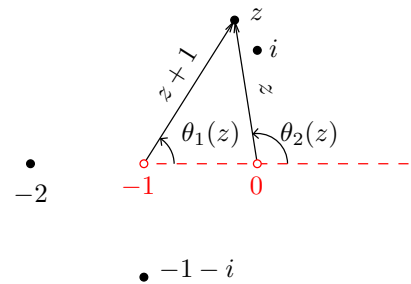
som mängder låter vi

$$g(z) = \ln |z + 1| + i\theta_1(z)$$

och

$$h(z) = \ln |z| + i\theta_2(z)$$

vara grenar till $\log(z + 1)$ respektive $\log z$ i Ω , där $\theta_{1,2}(z)$ varierar kontinuerligt i Ω och $\theta_{1,2}(-2) = \pi$, som ju är ett argument för -1 respektive -2 , se figuren till höger.



Då är

$$f_n(z) = g(z) + h(z) + 2n\pi i = \ln |z^2 + z| + i(\theta_1(z) + \theta_2(z) + 2n\pi)$$

alla grenar till $\log(z^2 + z)$ i Ω , numrerade med $n \in \mathbb{Z}$, och $f(z)$ är en av dessa. Kravet $f(-2) = \ln 2$ ger

$$\ln 2 = f_n(-2) = \ln 2 + i(\pi + \pi + 2n\pi), \quad \text{så } n = -1.$$

Alltså är

$$f(z) = f_{-1}(z) = \ln |z^2 + z| + i(\theta_1(z) + \theta_2(z) - 2\pi), \quad z \in \Omega,$$

så

$$f(i) = \left/ \begin{array}{l} \theta_1(i) = \pi/4 \\ \theta_2(i) = \pi/2 \\ i^2 + i = -1 + i \end{array} \right/ = \ln |-1 + i| + i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5\pi i}{4}$$

och

$$f(-1-i) = \left/ \begin{array}{l} \theta_1(-1-i) = 3\pi/2 \\ \theta_2(-1-i) = 5\pi/4 \\ (-1-i)^2 + (-1-i) = -1 + i \end{array} \right/ = \ln |-1 + i| + i\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} - 2\pi\right) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{3\pi i}{4}.$$

Eftersom $f(z)$ är en gren till $\log(z^2 + z)$ ger kedjeregeln slutligen

$$f'(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + z}, \quad \text{så } f'(i) = \frac{2i + 1}{-1 + i} = \frac{1 - 3i}{2} \quad \text{och} \quad f'(-1 - i) = \frac{-1 - 2i}{-1 + i} = -\frac{1 - 3i}{2}.$$

$$\text{Svar: } f(i) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5\pi i}{4}, \quad f(-1 - i) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{3\pi i}{4}, \quad f'(i) = \frac{1 - 3i}{2}, \quad f'(-1 - i) = -\frac{1 - 3i}{2}.$$

7. Skriv $f = u + iv$ som vanligt. Eftersom f är hel analytisk är f , och därmed v , kontinuerlig i \mathbb{C} . Enligt förutsättningarna är $v = 0$ precis då $z = x \geq 0$, och därför måste v ha ett och samma tecken i resten av \mathbb{C} , ty denna rest är sammanhängande; antag att $v > 0$ där.

Medelvärdessatsen för analytiska funktioner ger bland annat

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) d\theta, \quad r > 0, \quad \text{och därmed} \quad v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta}) d\theta, \quad r > 0,$$

eftersom integrationsvariabeln θ är reell. Men $v(re^{i\theta}) > 0$ i integranden förutom då $\theta = 0$, och vi får därför motsägelsen

$$0 = v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta}) d\theta > 0, \quad r > 0.$$

Alltså kan ingen sådan funktion f existera.

Resonemanget blir helt analogt om i stället $v < 0$ utanför strålen.

Svar: Ingen sådan funktion finns.

TATA45 Komplex analys 2023-03-17, kommentarer

1. Det går bra att svara med en summa av flera serier, som i lösningsskissen.

Även i (a)-uppgiften går det bra att partialbråksuppdelna, även om räkningarna då blir lite längre. Av någon anledning bryter en handfull studenter ut ett z före partialbråksuppdelningen och får $z/(z^2 - 4) = (z/4)(1/(z - 2) - 1/(z + 2))$, vilket inte är fel men onödigt. (Jag misstänker att de har påverkats av z -transformer i TATA77 Fourieranalys.)

I (b)-uppgiften måste man svara med en serie / flera serier med $(z - 1)$ -potenser. Termerna får alltså inte se ut som konstant gånger $z(z - 1)^n$, t.ex. - då är det inte längre en Laurentserie. Några som bröt ut z först (se föregående stycke) gjorde detta FEL.

2. Vid beräkningen av residyn i trippelpolen $z = 0$ kan man också använda derivataformeln, vilket också de allra flesta gjorde:

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1/\cos z}{z^3} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{\cos z} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin z}{\cos^2 z} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos z} + \frac{2 \sin^2 z}{\cos^3 z} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2}.$$

Några missar faktorn $1/2!$ här (FEL).

Några gör fel vid beräkningen av residyn i enkelpolen $z = \pi/2$ och tror att

$$\operatorname{Res}_{z=\pi/2} \frac{1/z^3}{\cos z} = \frac{1}{z^3} \Big|_{z=\pi/2} \quad (\text{FEL}),$$

som om man bara kunde stryka den "farliga" faktorn $\cos z$.

3. Det går naturligtvis bra att svara med $f(z) = \cos z - i \sin z + z^2 - (1 + i)$.

Några studenter bestämmer u (eller v) på samma sätt som i lösningsskissen, men i stället för att använda att vi vet vad $u - v$ är för att därefter bestämma v (respektive u) börjar de om och bestämmer även v (respektive u) från Cauchy-Riemanns ekvationer och får då typiskt

$$f = u + iv = (e^y \cos x + x^2 - y^2 + A) + i(-e^y \sin x + 2xy + B), \quad A, B \in \mathbb{R} \quad (\text{FEL}),$$

som om A och B vore oberoende. De får i och för sig att $A = -1 = B$, vilket är rätt, men i regel inte för att $u - v$ är givet utan för att $f(0) = -i$; med detta resonemang skulle man (felaktigt) kunna få vilket värde på $f(0)$ som helst, eftersom $f(0) = (1 + A) + iB$.

4. Utan att använda gemensamma spegelpunkter blir uppgiften onödigt svår, och alla som försökte lösa uppgiften på annat sätt konstruerade en avbildning som inte avbildar Ω på en cirkelring.
5. Vid undersökningen längs C_R måste man motivera att $e^{-z}/z^2 \rightarrow 0$ då $|z| \rightarrow +\infty$, $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi/2$; det är ju viktigt att $|e^{-z}| = e^{-x} \leq 1$ där, och om vi exempelvis hade undersökt andra kvadranten i stället hade det blivit mycket mera komplicerat.

Vid undersökningen längs L_R , där $z = x$, $x : 0 \rightarrow R$, och $u = x^2 + e^{-x} + \pi^2$, $v = 0$, resonerar några på ett av följande sätt för att motivera att argumenttillskottet längs L_R är noll:

- " $v = 0$ ". Sant men det RÄCKER EJ, ty även u skulle ju ha kunnat vara noll någonstans, och i så fall vore argumenttillskottet odefinierat.
- " $u(0) = \pi^2 + 1$, $u \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$ och $v = 0$ ". Sant men det RÄCKER EJ, ty inte heller nu vet vi att $u \neq 0$ (Envar 1).
- " $u \geq \pi^2 + 1 > 0$, $v = 0$ ". FEL, ty $u'(0) = -1 < 0$, så u antar mindre värden än $u(0) = \pi^2 + 1$ (Envar 1).

Att däremot $u \geq \pi^2 > 0$ och $v = 0$ på L_R ser man omedelbart, och det räcker så klart.

6. Några skriver $f(z) = \ln|z^2 + z| + i\theta(z)$, utan att först dela upp $\log(z^2 + z) = \log(z + 1) + \log z$ (UNDVIK DETTA), men gör då fel vid hanteringen av θ ; t.ex. tror de ofta att θ -värdena tillhör ett intervall av längd 2π (FEL).

Några skriver till och med $f(z) = \ln|z^2 + z| + i\theta(z^2 + z)$ (FEL); t.ex. är ju $i^2 + i = -1 + i = (-1 - i)^2 + (-1 - i)$, men θ -värdena i punkterna $z = i$ och $z = -1 - i$ är olika, se lösningsskissen.

7. Inget att kommentera.