Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: `TATA45`
Modul: `TEN1`

Tentamen i Komplex analys (TATA45)

2023-08-24 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

1. (a) Bestäm alla hela analytiska funktioner f sådana att $\operatorname{Im} f = x^2 + y^2$.
   (b) Lös ekvationen $\cos z = 5/4$. Svara i rektangulär form.
   (c) Vilken multiplicitet har nollstället $z = 1$ till funktionen $f(z) = 1 + \cos \pi z$?
2. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar högra halvplanet $\operatorname{Re} z > 0$ på området $|w| > 1$. Bestäm sedan bilden i w-planet av linjen $\operatorname{Re} z = -1$ i z-planet under avbildningen $w(z)$.
3. Beräkna med residykalkyl
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-2i)(x^2+1)^2}.$$
4. Bestäm antalet nollställen som funktionen
$$f(z) = z^5 + (3+4i)z^2 + e^{iz}$$
har i den slutna cirkelringen $1 \leq |z| \leq 2$.
5. Låt C vara halvcirkeln i högra halvplanet från $z = -2i$ till $z = 2i$. Beräkna
$$\int_C \frac{\tan z}{z^2}\, dz.$$
6. Antag att f är analytisk i en punkterad skiva $0 < |z - z_0| < \delta$.
   (a) Definiera vad som menas med $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$, residyn för f i punkten z_0.
   (b) Om $f(z) = g(z)/(z-z_0)^N$, där g är analytisk i z_0 och $N \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, härled ett uttryck för $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$.
   (c) Om $f(z) = p(z)/q(z)$, där p och q är analytiska i z_0 och q har enkelt nollställe i z_0, härled ett uttryck för $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$.
7. Antag att f har isolerad singularitet i origo. Visa att e^f, som ju också har isolerad singularitet i origo, inte kan ha pol där.

TATA45 Komplex analys 2023-08-24, lösningsskisser

1. (a) Om $f = u + iv$ är analytisk, så är $v = \operatorname{Im} f$ harmonisk, enligt sats. Här är $v = x^2 + y^2$, varför $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = 2 + 2 = 4 \neq 0$, så v är *inte* harmonisk; alltså finns ingen analytisk funktion f med den givna imaginärdelen. Svar: Någon sådan f finns inte.

   (b) Sätt $s = e^{iz}$; då är $s \neq 0$, och $\cos z = (s + s^{-1})/2 = 5/4 \Leftrightarrow s^2 - 5s/2 + 1 = 0 \Leftrightarrow s = 2$ eller $s_2 = 1/2$. Eftersom $z = -i \log s$ får vi $z = 2m\pi - i \ln 2$, $m \in \mathbb{Z}$, eller $z = 2n\pi - i \ln(1/2)$, $n \in \mathbb{Z}$, som tillsammans kan skrivas Svar: $z = 2n\pi \pm i \ln 2$, $n \in \mathbb{Z}$.

   (c) $f(1) = 1 + \cos \pi z_{|z=1} = 0$, $f'(1) = -\pi \sin \pi z_{|z=1} = 0$ och $f''(1) = -\pi^2 \cos \pi z_{|z=1} = \pi^2 \neq 0$, så nollstället $z = 1$ har multiplicitet 2. Svar: 2.

2. Denna uppgift kan lösas på många olika sätt, och många olika $w(z)$ löser problemet.

   Låt $L : \operatorname{Re} z = 0$ och $\tilde{L} : |w| = 1$. Punkterna $z_1 = -1$ och $z_2 = 1$ är spegelpunkter m.a.p. L och punkterna $w_1 = 0$ och $w_2 = \infty$ är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{L}$. Om vi kompletterar med $z_3 = \infty \in L$ och $w_3 = 1 \in \tilde{L}$ och sedan bestämmer den Möbiusavbildning $w(z)$ som är sådan att $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (w_1, w_2, w_3)$ kommer L att avbildas på $\tilde{L}$, och eftersom $z_2 = 1$ ligger i området $\operatorname{Re} z > 0$ och $w_2 = \infty$ i området $|w| > 1$ kommer $w(z)$ att avbilda på det önskade sättet: $\operatorname{Re} z > 0 \mapsto |w| > 1$.

   Våra tripplar ger, via ansatsen $(w - 0)/1 = k(z + 1)/(z - 1)$ och insättning av $\infty \mapsto 1$ att $w = (z + 1)/(z - 1)$.

   Låt $\Gamma : \operatorname{Re} z = -1$. Vi noterar att $1 \mapsto \infty$ och att $1 \notin \Gamma$, och därför är bilden $\tilde{\Gamma}$ en vanlig cirkel $|w - c| = r$, där centrum $c = w(-3) = 1/2$ eftersom 1 och -3 är spegelpunkter m.a.p. Γ och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{\Gamma}$. Till sist, $-1 \in \Gamma$ ger att $w(-1) = 0 \in \tilde{\Gamma}$, så $r = 1/2$, och cirkeln är $|w - 1/2| = 1/2$. Svar: T.ex. $w = (z + 1)/(z - 1)$; bilden blir då cirkeln $|w - 1/2| = 1/2$.

   (Anmärkning: *Alla* möjliga avbildningar ges av $w(z) = \lambda\big(z - (-a + ib)\big)/\big(z - (a + ib)\big)$, där $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $|\lambda| = 1$; då blir bilden cirkeln $\big|w - \lambda/(a + 1)\big| = a/(a + 1)$. Avbildningen ovan är alltså fallet $a = 1$, $b = 0$, $\lambda = 1$.)

3. Låt $f(z) = 1/\big((z - 2i)(z^2 + 1)^2\big) = (z - 2i)^{-1}(z - i)^{-2}(z + i)^{-2}$; då är den sökta integralen $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Eftersom f är singulär i $z = \pm i$ (dubbelpoler) och i $z = 2i$ (enkelpol) är det enklast att integrera längs konturen $C_R^- - L_R$, där C_R^- är halvcirkeln från $z = -R$ till $z = R$ i undre halvplanet och L_R är sträckan från $z = -R$ till $z = R$ (rita figur, och observera orienteringen). Residysatsen ger då R är stort ($R > 1$ räcker)

$$
\begin{aligned}
(*) \qquad \int_{C_R^- - L_R} f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{(z - 2i)^{-1}(z - i)^{-2}}{(z + i)^2} = 2\pi i \frac{d}{dz}\big((z - 2i)^{-1}(z - i)^{-2}\big)_{|z=-i} \\
&= 2\pi i\big(-(z - 2i)^{-2}(z - i)^{-2} - 2(z - 2i)^{-1}(z - i)^{-3}\big)_{|z=-i} \\
&= 2\pi i \left(-\frac{1}{36} - \frac{1}{12}\right) = -\frac{2\pi i}{9}.
\end{aligned}
$$

   ML-uppskattning ger, eftersom $|z - 2i| \geq |z| - |2i| = R - 2 > 0$ och $|z^2 + 1| \geq |z|^2 - |1| = R^2 - 1 > 0$ på C_R^- för stora R, att

$$
\left| \int_{C_R^-} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R - 2)(R^2 - 1)^2} \to 0 \qquad \text{då } R \to \infty,
$$

   av gradskäl, och eftersom $\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \to I$ då $R \to \infty$ får vi genom att låta $R \to \infty$ i $(*)$ att $0 - I = -2\pi i/9$, d.v.s. att $I = 2\pi i/9$. Svar: $2\pi i/9$.

4. På cirkeln $|z| = 2$ skriver vi $f(z) = g(z) + h(z)$ med

$$
g(z) = z^5 \quad \text{och} \quad h(z) = (3 + 4i)z^2 + e^{iz}.
$$

   Eftersom $|g(z)| = |z|^5 = 32$ och $|h(z)| = |(3 + 4i)z^2 + e^{iz}| \leq |(3 + 4i)z^2| + |e^{iz}| = 5|z|^2 + e^{-y} \leq 20 + e^2 < 20 + 3^2 = 29$ där ser vi att $|g(z)| > |h(z)|$ för alla punkter på cirkeln $|z| = 2$. Rouchés sats medför att $g(z) + h(z)$, alltså $f(z)$, har lika många nollställen i $|z| \leq 2$ som $g(z)$, d.v.s. 5 (inga nollställen finns *på* cirkeln $|z| = 2$).

På cirkeln $|z| = 1$ skriver vi $f(z) = g(z) + h(z)$ på ett annat sätt:

$$g(z) = (3+4i)z^2 \quad \text{och} \quad h(z) = z^5 + e^{iz}.$$

På denna mindre cirkel är $|g(z)| = 5|z|^2 = 5$ medan $|h(z)| = |z^5 + e^{iz}| \leq |z^5| + |e^{iz}| = |z|^5 + e^{-y} \leq 1 + e^1 < 1 + 3 = 4$, så Rouché ger att $f(z)$ har lika många nollställen i $|z| < 1$ som $g(z)$, d.v.s. 2.

Sammantaget har $f(z)$ således $5 - 2 = 3$ nollställen i $1 \leq |z| \leq 2$. Svar: Tre.

5. Integranden

$$f(z) = \frac{\tan z}{z^2} = \frac{\sin z}{z^2 \cos z}$$

har singulariteter där $z = 0$ och där $\cos z = 0$, och det senare gäller då $e^{2iz} = -1$, d.v.s. då $z = \big(\log(-1)\big)/2i = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Låt $0 < \epsilon < \pi/2$ och låt $L_{+,\epsilon}$ och $L_{-,\epsilon}$ vara sträckorna från $i\epsilon$ till $2i$ respektive från $-2i$ till $-i\epsilon$, och låt C_ϵ vara halvcirkeln $z = \epsilon\, e^{i\theta}$, $\theta : -\pi/2 \to \pi/2$; då är $\Gamma_\epsilon = C - L_{+,\epsilon} - C_\epsilon - L_{-,\epsilon}$ en positivt orienterad kontur (rita figur!). Innanför Γ_ϵ finns endast singulariteten $\pi/2$, så

$$(*) \qquad \int_{\Gamma_\epsilon} f(z)\,dz = \int_{C - L_{+,\epsilon} - C_\epsilon - L_{-,\epsilon}} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\pi/2} f(z) = 2\pi i \left.\frac{(\sin z)/z^2}{\frac{d}{dz}(\cos z)}\right|_{z=\pi/2} = -\frac{8i}{\pi}.$$

Vidare, parametriseringarna $z = iy$, $y : -2 \to -\epsilon$, av $L_{-,\epsilon}$ och $z = iy$, $y : \epsilon \to 2$, av $L_{+,\epsilon}$ ger, om vi noterar att $f(iy) = \tan(iy)/(iy)^2 = -i(\tanh y)/y^2$ och $dz = i\,dy$ på båda, att

$$\int_{L_{-,\epsilon}} f(z)\,dz + \int_{L_{+,\epsilon}} f(z)\,dz = \int_{-2}^{-\epsilon} \frac{\tanh y}{y^2}\,dy + \int_{\epsilon}^{2} \frac{\tanh y}{y^2}\,dy = 0,$$

eftersom integranden $(\tanh y)/y^2$ är en udda funktion.

Nu återstår bara integralen längs C_ϵ. Sätt $g(z) = \tan z$; då är g udda, och $g'(0) = 1 + \tan^2 0 = 1$, så $g(z) = z + \mathcal{O}(z^3)$ och därmed är $f(z) = 1/z + \mathcal{O}(z)$, varför, med parametriseringen av C_ϵ ovan,

$$\int_{C_\epsilon} f(z)\,dz = \int_{C_\epsilon} \frac{dz}{z} + \int_{C_\epsilon} \mathcal{O}(z)\,dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{i\epsilon\, e^{i\theta}}{\epsilon\, e^{i\theta}}\,d\theta + \int_{C_\epsilon} \mathcal{O}(z)\,dz = i\pi + \int_{C_\epsilon} \mathcal{O}(z)\,dz \to i\pi$$

då $\epsilon \to 0^+$, eftersom $\mathcal{O}(z)$ är begränsad nära $z = 0$ (mer än så: $\mathcal{O}(z) \to 0$ då $z \to 0$, men det behövs inte) och längden av C_ϵ går mot noll då $\epsilon \to 0^+$.

Låt slutligen $\epsilon \to 0^+$ i $(*)$. Då får vi

$$\int_C f(z)\,dz - 0 - i\pi = -\frac{8i}{\pi}, \quad \text{d.v.s.} \quad \int_C \frac{\tan z}{z^2}\,dz = i\left(\pi - \frac{8}{\pi}\right).$$

6. Se kompendiet, Avsnitt 5.1, närmare bestämt Definition 5.1, Proposition 5.4 och Följdsats 5.5. (Observera att uttrycken i (b) och (c) ska *härledas*, så det räcker inte att bara skriva upp dem.)

7. Antag motsatsen, d.v.s. att e^f har pol i origo. Då finns ett heltal $N \geq 1$ och en funktion g som är analytisk i origo, och därmed i någon skiva $|z| < \delta$, och som uppfyller att $g(0) \neq 0$ sådana att

$$e^{f(z)} = \frac{g(z)}{z^N}, \qquad 0 < |z| < \delta.$$

$e^{f(z)} \neq 0$, alltid, så $g(z) \neq 0$ i hela skivan $|z| < \delta$, och derivering av ovanstående samband ger

$$e^{f(z)} f'(z) = \frac{g'(z)}{z^N} - \frac{N g(z)}{z^{N+1}} \quad \text{och därmed} \quad f'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{N}{z}, \qquad 0 < |z| < \delta.$$

Integration längs cirkeln $C_\rho : |z| = \rho$ ett varv moturs, där $0 < \rho < \delta$, ger nu

$$0 = \int_{C_\rho} f'(z)\,dz = \int_{C_\rho} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz - N \int_{C_\rho} \frac{dz}{z} = 0 - N \cdot 2\pi i \neq 0,$$

eftersom f' har en primitiv funktion (nämligen f) i $0 < |z| < \delta$ och g'/g är analytisk i $|z| < \delta$. Vi har alltså landat i en motsägelse, och därför kan e^f inte ha pol i origo, vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2023-08-24, kommentarer

1. (a) Man kan också visa att lösning saknas genom att undersöka vad Cauchy-Riemanns ekvationer ger, vilket också de allra flesta gjorde: $u'_x = v'_y = 2y$ ger $u = 2xy + \varphi(y)$, där $\varphi(y)$ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Insättning i $u'_y = -v'_x = -2x$ ger sedan $\varphi'(y) = -4x$, vilket är en motsägelse eftersom $\varphi'(y)$ endast får bero på y; alltså finns det ingen hel funktion f med $\operatorname{Im} f = v$. Observera att motsägelsen uppstår redan när man ser att $\varphi'(y) = -4x$, och det finns därför ingen anledning att gå vidare därifrån – undvik det!

   (b) Inget att kommentera.

   (c) Flera blandar in *alla* nollställen för $f(z) = 1 + \cos \pi z$, alltså $z = 1 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, oklart varför. Multipliciteten för ett nollställe är ju en *lokal* egenskap, och det enda som spelar roll här är vad som händer nära $z = 1$.

   Några byter variabel, typiskt $s = e^{i\pi z}$, och visar sedan att funktionen $g(s) = 1 + (s + 1/s)/2$ har dubbelt nollställe i $s = -1$, vilket är sant, men påstår sedan, utan vidare motivering, att det medför att den ursprungliga funktionen $f(z) = 1 + \cos \pi z = g(e^{i\pi z})$ har dubbelt nollställe i $z = 1$ (OFULLSTÄNDIGT RESONEMANG). Att det råkar bli så i detta fall beror på att $(e^{i\pi z})'(1) \neq 0$, men om man byter på annat sätt, t.ex. $s = 1 + \cos \pi z$, blir $g(s) = s$, som har enkelt nollställe i $s = 0$ medan $f(z) = g(1 + \cos \pi z)$ fortfarande har dubbelt nollställe i $z = 1$.

2. Att det finns så stor frihet att hitta en Möbius $w(z)$ som avbildar $\operatorname{Re} z > 0$ på $|w| > 1$ när man inte har några ytterligare krav har vållat problem för en del.

   Observera att de satser som finns i kursen rörande hur man kan avbilda en given $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel på en given $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel handlar om två fall: (1) tre randpunkter på tre randpunkter; och (2) par av spegelpunkter på par av spegelpunkter samt en randpunkt på en randpunkt. Det går inte att blanda dessa och t.ex. avbilda två randpunkter på två randpunkter och sedan komplettera med att låta en inre punkt avbildas på en inre punkt. Gör man så *måste* man i efterhand bevisa att den så framtagna avbildningen avbildar på önskat sätt.

   De allra flesta har låtit $(-1, 1, 0) \mapsto (0, \infty, 1)$, enligt fall (2) ovan, och får då $w = (1 + z)/(1 - z)$ och bilden $|w + 1/2| = 1/2$, vilket är en av oändligt många korrekta lösningar som finns.

3. Det går naturligtvis bra att i stället integrera längs konturen $C_R^+ + L_R$, där C_R^+ som vanligt är halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet, och det har också de flesta gjort. Då får man räkna ut två residyer: en i dubbelpolen $z = i$ (på samma sätt som residyn i $z = -i$ beräknades) och en i enkelpolen $z = 2i$; ML-uppskattningen på C_R^+ blir identisk med den på C_R^-.

   Det vanligaste felet är att hantera ML-uppskattningen på vald halvcirkel C_R fel, typiskt

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R-2)(R^2+1)^2} \text{ eller } \frac{\pi R}{|R-2i|(R^2-1)^2} \text{ eller } \frac{\pi R}{(R-2i)(R^2-1)^2}.$$

   Den första beror på en felvänd triangelolikhet; den andra kan vid ett första påseende se vettig ut, men $|z - 2i| < |R - 2i|$ på en del av C_R (rita figur!); den tredje är dessvärre inte helt ovanlig men är grovt fel: uttrycket där är ju inte ens reellt (påståenden som $2 \leq 5 + i$ är meningslösa)!

4. Några tror att $|e^{iz}| = 1$ (FEL); detta gäller endast om $z \in \mathbb{R}$, och allmänt är ju $|e^{iz}| = e^{-y}$. Ytterligare några påstår att $|e^{iz}| = e^2$ på $|z| = 2$ och $|e^{iz}| = e^1$ på $|z| = 1$, vilket fortfarande är FEL men kanske inte lika grovt: det är i alla fall sant att $|e^{iz}| \leq e^r$ på $|z| = r$ när $r \in \{1, 2\}$.

   I övrigt förekommer ett antal ”klassiska” fel i denna Rouchéuppgift. Se tentan 2021-01-16 för en allmän diskussion.

5. Några tycks tro att C är randen till halvcirkelskivan $|z| < 2$, $\operatorname{Re} z > 0$, alltså att C innehåller sträckan mellan $2i$ och $-2i$ på imaginäraxeln (FEL). Om man tror det får man dessutom problemet att integranden är singulär på denna kontur, nämligen i $z = 0$, och då är integralen odefinierad.

6. Inget att kommentera.

7. Några har undersökt det i sammanhanget mycket enkla specialfallet när f har pol i origo, men det räcker inte för poäng – det intressanta fallet är när f har väsentlig singularitet där.

Lars Alexandersson, 4 september 2023