Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

Tentamen i Komplex analys

2024-01-13 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – UPGn godkänd ($n = 1, 2, 3$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/11/14 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/3 UPG-omgångar är godkända.

Svar finns senast måndag 15/1 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Lös ekvationen
$$\tan z = \frac{2-i}{5}.$$
Svaret ska ges i rektangulär form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. (1p)

   (b) Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar punkterna $z_1 = i$, $z_2 = 1$ och $z_3 = \infty$ på i tur och ordning $w_1 = 0$, $w_2 = i$ och $w_3 = 1$. Bestäm sedan bilden i w-planet av cirkeln $|z - 2| = 2$ i z-planet. (2p)

2. (a) Låt L vara sträckan (alltså raka spåret) från $z = i\pi$ till $z = 1$. Beräkna
$$\int_L z\, e^z\, dz.$$
(1p)

   (b) Låt
$$f(z) = \frac{144}{3\,e^z + 7 + 2\,e^{-z}}.$$
Bestäm alla termer av grad högst 2 (rest $\mathcal{O}(z^3)$) i Maclaurinserien för f, och bestäm denna series konvergensradie R. (2p)

3. Beräkna med residykalkyl
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 6x + 10)^3}.$$

Var god vänd!

Del B

4. Bestäm antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^4 + z^3 + 14z^2 + 9z + 40$$

har i högra halvplanet $\operatorname{Re} z > 0$.

5. Låt Ω vara $\mathbb{C}$ med positiva imaginäraxeln $\{z = iy : y \geq 0\}$ borttagen. Bestäm en gren $f(z)$ till den flervärda funktionen

$$2\pi z^{1/3} + \sqrt{3}\log z$$

i Ω sådan att $f'(1) \in \mathbb{R}$ och $f(-1) \in \mathbb{R}$. Ange speciellt $f'(1)$ och $f(-1)$.

6. I kursen i flervariabelanalys visar man som bekant att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

(genom att använda planpolära koordinater i dubbelintegralen $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$), men resultatet kan också fås med komplex analys på följande sätt:

Låt $c = \sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4}$ och sätt

$$g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2cz}}.$$

Integrera g längs parallellogrammen med hörn $\pm R$ och $\pm R + c$, och låt $R \to \infty$.

Ledning: Visa först att $g(z) - g(z + c) = e^{-z^2}$. Notera att $c^2 = i\pi$.

TATA45 Komplex analys 2024-01-13, lösningsskisser

1. (a) Eftersom

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})/2i}{(e^{iz} + e^{-iz})/2} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{i2z} - 1}{e^{i2z} + 1} = \frac{2-i}{5}$$

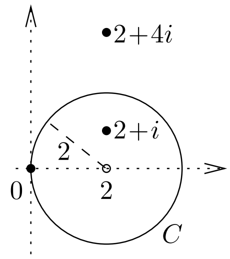
är ekvationen, om vi sätter $w = e^{i2z}$, ekvivalent med att

$$\frac{w-1}{w+1} = \frac{1+2i}{5} \;\Leftrightarrow\; w = 1+i \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\log(1+i)}{2i} = \underline{\underline{\left(\frac{\pi}{8} + n\pi\right) - i\,\frac{\ln 2}{4},\ n \in \mathbb{Z}.}}$$

(b) Att $(i, \infty) \mapsto (0, 1)$ ger oss ansatsen

$$\frac{w-0}{w-1} = k\,\frac{z-i}{1}, \text{ och } 1 \mapsto i \text{ ger sedan } k = 1/2, \text{ så } w = \frac{z-i}{z-2-i}.$$

Låt C vara cirkeln $|z-2| = 2$ i z-planet och $\tilde{C}$ den $\hat{\mathbb{C}}$-cirkel i w-planet som C avbildas på under $w(z)$ ovan. Eftersom $w(2+i) = \infty$ och $2+i \notin C$ är $\tilde{C}$ en vanlig cirkel $|w-c| = r$, där centrum



$$c = w(2+4i) = \frac{3-2i}{3}$$

eftersom $2+i$ och $2+4i$ är spegelpunkter m.a.p. C och ∞ och c är spegelpunkter m.a.p. $\tilde{C}$; notera att $2+i$ och $2+4i$ ligger på samma stråle från C:s centrum 2 och på avstånd $\ell_1 = 1$ respektive $\ell_2 = 4$ från det ($\ell_1\ell_2 = 2^2$), se figur. Vidare, $0 \in C$ ger $w(0) = (1+2i)/5 \in \tilde{C}$, så

$$r = \left|\frac{1+2i}{5} - \frac{3-2i}{3}\right| = \left|\frac{-12+16i}{15}\right| = \frac{4}{3},$$

och $\tilde{C}$ är därmed cirkeln $\big|w - (3-2i)/3\big| = 4/3$.

<u>Svar</u>: $w(z) = \dfrac{z-i}{z-2-i}$; bilden är $\left|w - \dfrac{3-2i}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$.

2. (a) I hela $\mathbb{C}$ har integranden $f(z) = z\,e^z$ en primitiv $F(z) = (z-1)e^z$, vilket kan fås via partiell integration. Således är

$$\int_L z\,e^z\,dz = \big[(z-1)e^z\big]_{i\pi}^{1} = (1-1)e^1 - (i\pi - 1)e^{i\pi} = \underline{\underline{-1 + i\pi}}.$$

(b) Med $w = e^z$ är $w \neq 0$ och nämnaren

$$\begin{aligned} 3w + 7 + 2/w = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad w^2 + 7w/3 + 2/3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = -1/3 \text{ eller } w = -2 \\ &\Leftrightarrow \quad z = -\ln 3 + i(\pi + 2n\pi) \text{ eller } z = \ln 2 + i(\pi + 2n\pi),\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Täljaren $= 144 \neq 0$, så i dessa punkter har f poler, men är analytisk för övrigt. Maclaurin-serien för f konvergerar därför i skivan $|z| < R$, där R är avståndet till närmaste pol från origo sett, $\ln 2 \pm i\pi$ (två poler ligger lika nära), så $R = \sqrt{(\ln 2)^2 + \pi^2}$.

Med ansatsen

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \mathcal{O}(z^3)$$

och standardutvecklingen $e^z = 1 + z + z^2/2 + \mathcal{O}(z^3)$, som med $-z$ i stället för z ger $e^{-z} = 1 - z + z^2/2 + \mathcal{O}(z^3)$, får vi att nämnaren $3\,e^z + 7 + 2\,e^{-z} = 12 + z + 5z^2/2 + \mathcal{O}(z^3)$, så

$$\begin{aligned} 144 &= \big(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \mathcal{O}(z^3)\big)\big(12 + z + 5z^2/2 + \mathcal{O}(z^3)\big) \\ &= 12c_0 + (c_0 + 12c_1)z + (5c_0/2 + c_1 + 12c_2)z^2 + \mathcal{O}(z^3), \end{aligned}$$

och entydighet hos koefficienterna ger $12c_0 = 144$, $c_0 + 12c_1 = 0$ och $5c_0/2 + c_1 + 12c_2 = 0$, d.v.s. $c_0 = 12$, $c_1 = -1$ och $c_2 = -29/12$, så $f(z) = 12 - z - 29z^2/12 + \mathcal{O}(z^3)$.

<u>Svar</u>: $f(z) = 12 - z - \dfrac{29}{12}z^2 + \mathcal{O}(z^3)$; $R = \sqrt{(\ln 2)^2 + \pi^2}$.

3. Sätt

$$f(z)=\frac{1}{\left(z^2-6z+10\right)^3}=\frac{1}{\left((z-3)^2+1\right)^3}=\frac{1}{\left(z-(3+i)\right)^3\left(z-(3-i)\right)^3};$$

vi ser att f är analytisk utom i trippelpolerna $3\pm i$. Vi söker $I=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt$.

Låt L_R vara sträckan från $-R$ till R och låt C_R^+ vara halvcirkeln från R till $-R$ i övre halvplanet (rita figur!). Om R är stort nog ($R>\sqrt{10}$) medför residysatsen och sedvanlig residyberäkning (eller Cauchys integralformel för derivata) att

$$(*)\qquad \int_{L_R+C_R^+} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=3+i} f(z) = 2\pi i\,\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(z-3+i)^{-3}\Big|_{z=3+i}$$

$$= \pi i(-3)(-4)(z-3+i)^{-5}\Big|_{z=3+i}=\frac{3\pi}{8}.$$

Parametriseringen $z=t$, $t:-R\to R$, av L_R ger $\int_{L_R}f(z)\,dz=\int_{-R}^{R}f(t)\,dt\to I$ då $R\to\infty$. Vidare, eftersom $|z^2-6z+10|\ge|z|^2-6|z|-10=R^2-6R-10>0$ på C_R^+ om R är tillräckligt stort får vi ML-uppskattningen

$$\left|\int_{C_R^+}f(z)\,dz\right|\le\frac{\pi R}{(R^2-6R-10)^3}\to 0\quad \text{då } R\to\infty,$$

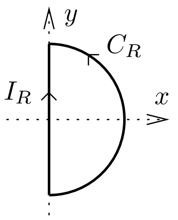
av gradskäl, så $\int_{C_R^+}f(z)\,dz\to 0$ då $R\to\infty$.

Genom att låta $R\to\infty$ i $(*)$ får vi slutligen $I+0=3\pi/8$, d.v.s. $I=3\pi/8$. Svar: $\dfrac{3\pi}{8}$.

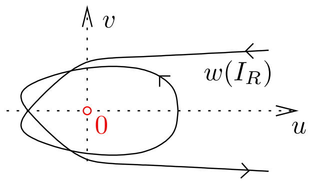
4. Vi studerar argumenttillskottet för $p(z)=z^4+z^3+14z^2+9z+40$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R=C_R-I_R$ (se figur nere till vänster – observera orienteringen!).

På C_R får vi tillskottet $\Delta_{C_R}\arg p(z)=\Delta_{C_R}\arg z^4+\Delta_{C_R}\arg(1+1/z+14/z^2+9/z^3+40/z^4)\to 4\cdot\pi+0=4\pi$ då $R\to\infty$.

På I_R får vi $p(z)=p(iy)=(y^4-14y^2+40)+i(9y-y^3)=(y^2-4)(y^2-10)+i\,y(9-y^2)=u+iv$, $y:-R\to R$, och därmed nedanstående teckentabell då $y\ge 0$ (observera att u är jämn och v är udda), samt kurva $w=p(z)$ då z genomlöper I_R:



y	0	<	2	<	3	<	$\sqrt{10}$	<
u (jämn)	+	+	0	−	−	−	0	+
v (udda)	0	+	+	+	0	−	−	−



Dessutom får vi av gradskäl att $v/u\to 0$ då $y\to\pm\infty$ (u drar mer än v), och detta tillsammans med tabellen ovan ger skissen ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{I_R}\arg p(z)\to 4\pi$ då $R\to\infty$. Eftersom poler saknas blir antalet nollställen i högra halvplanet därför $(1/2\pi)\lim_{R\to\infty}(\Delta_{C_R}\arg p(z)-\Delta_{I_R}\arg p(z))=(4\pi-4\pi)/2\pi=0$. Svar: Noll.

5. Låt $L(z)=\ln|z|+i\,\theta(z)$, där $\theta(z)$ är det argument för $z\in\Omega$ som uppfyller $-3\pi/2<\theta(z)<\pi/2$; då är $L(z)$ en gren till $\log z$ i Ω, och alla grenar till $\log z$ där ges av $L_k(z)=L(z)+i2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Grenarna till den flervärda funktionen $2\pi z^{1/3}+\sqrt{3}\log z$ i Ω kan nu skrivas

$$f_{m,n}(z)=2\pi\,e^{L_m(z)/3}+\sqrt{3}\,L_n(z)=2\pi\,e^{L(z)/3}e^{i2m\pi/3}+\sqrt{3}\left(L(z)+i2\pi n\right),\quad m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z},\ z\in\Omega,$$

men för att få alla grenar räcker det med $m\in\{-1,0,1\}$, $n\in\mathbb{Z}$, eftersom $e^{i2m\pi/3}$ är periodisk och bara antar tre olika värden. f är alltså någon av alla dessa $f_{m,n}$.

Vi utnyttjar först att n försvinner vid derivering:

$$f'_{m,n}(z)=\frac{2\pi}{3z}\,e^{L(z)/3}e^{i2m\pi/3}+\frac{\sqrt{3}}{z},\qquad m\in\{-1,0,1\},\ n\in\mathbb{Z},\ z\in\Omega.$$

Eftersom $\theta(1) = 0$ och därmed $L(1) = \ln|1| + i\,\theta(1) = 0$ får vi

$$f'_{m,n}(1) = \frac{2\pi}{3} e^{i2m\pi/3} + \sqrt{3}, \qquad m \in \{-1,0,1\},\ n \in \mathbb{Z},$$

som är reellt precis då $m = 0$, eftersom $e^{\pm i2\pi/3} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$ och $e^{i0} = 1$.

Vidare, eftersom $\theta(-1) = -\pi$ och därmed $L(-1) = \ln|-1| + i\,\theta(-1) = -i\pi$ får vi

$$\begin{aligned} f_{0,n}(-1) &= 2\pi\, e^{-i\pi/3} + \sqrt{3}\,(-i\pi + i2\pi n) = 2\pi \cdot \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\,(-i\pi + i2\pi n) \\ &= \pi + i\,2\sqrt{3}\,(n-1)\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

som är reellt precis då $n = 1$.

Således är

$$f(z) = f_{0,1}(z) = 2\pi\, e^{L(z)/3} + \sqrt{3}\,(L(z) + i2\pi), \qquad z \in \Omega,$$

och speciellt är, enligt ovan, $f'(1) = 2\pi/3 + \sqrt{3}$ och $f(-1) = \pi$.

<u>Svar</u>: $f(z) = 2\pi\, e^{L(z)/3} + \sqrt{3}\,(L(z) + i2\pi)$, där $L(z) = \ln|z| + i\,\theta(z)$, $-3\pi/2 < \theta(z) < \pi/2$; $f'(1) = 2\pi/3 + \sqrt{3}$ och $f(-1) = \pi$.

6. Vi följer ledningen och får, eftersom $c = \sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4}$ och därmed $c^2 = i\pi$, $e^{-c^2} = -1$ och $e^{-2c^2} = 1$,

$$\begin{aligned} g(z) - g(z+c) &= \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2cz}} - \frac{e^{-(z+c)^2}}{1 + e^{-2c(z+c)}} = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2cz}} - \frac{e^{-z^2} e^{-2cz} e^{-c^2}}{1 + e^{-2cz} e^{-2c^2}} \\ &= \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2cz}} + \frac{e^{-z^2} e^{-2cz}}{1 + e^{-2cz}} = \frac{e^{-z^2}(1 + e^{-2cz})}{1 + e^{-2cz}} = e^{-z^2}. \end{aligned}$$

Sätt $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$, och låt L_R^1 vara den vågräta sträckan från $-R$ till R, V_R^+ den sneda sträckan från R till $R + c$, L_R^2 den vågräta sträckan från $R + c$ till $-R + c$ och V_R^- den sneda sträckan från $-R + c$ till $-R$ (rita figur!); låt också $\Gamma_R = L_R^1 + V_R^+ + L_R^2 + V_R^-$ vara hela parallellogrammen.

Vi noterar att g är singulär i punkterna där

$$1 + e^{-2cz} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{\log(-1)}{2c} = -\frac{i\pi + i2n\pi}{2c} = -\frac{c}{2}(1 + 2n), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

av vilka $z = c/2$ (för $n = -1$) ligger innanför Γ_R då $R > 0$. Residykalkyl ger därför

$$(*) \qquad \int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=c/2} \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2cz}} = 2c^2 \frac{e^{-z^2}}{(-2c)e^{-2cz}}\Big|_{z=c/2} = c\,e^{-c^2/4} = c\,e^{-i\pi/4} = \sqrt{\pi}.$$

Parametriseringarna $z = t$, $t : -R \to R$, av L_R^1 och $z = t + c$, $t : R \to -R$, av L_R^2 ger

$$\int_{L_R^1} g(z)\,dz + \int_{L_R^2} g(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \big(g(t) - g(t+c)\big)dt = \int_{-R}^{R} e^{-t^2} dt \to I, \quad R \to \infty.$$

Punkterna på $V_R^{\pm}$ kan skrivas $z = \pm R + tc$, $0 \le t \le 1$, och eftersom $\operatorname{Re}(c) = \sqrt{\pi/2}$ och $c^2 = i\pi$ får vi

$$\big|g(\pm R + tc)\big| = \frac{\big|e^{-(\pm R + tc)^2}\big|}{\big|1 + e^{-2c(\pm R + tc)}\big|} = \frac{\big|e^{-R^2} e^{\mp 2tRc} e^{-t^2c^2}\big|}{\big|1 + e^{\mp 2cR} e^{-2tc^2}\big|} = \frac{e^{-R^2} e^{\mp tR\sqrt{2\pi}}}{\big|1 + e^{\mp 2cR} e^{-i2\pi t}\big|}.$$

På V_R^+ får vi $e^{-tR\sqrt{2\pi}} \le 1$ och $\big|1 + e^{-2cR} e^{-i2\pi t}\big| \ge 1 - \big|e^{-2cR} e^{-i2\pi t}\big| = 1 - e^{-R\sqrt{2\pi}} > 0$, och på V_R^- får vi $e^{tR\sqrt{2\pi}} \le e^{R\sqrt{2\pi}}$ och $\big|1 + e^{2cR} e^{-i2\pi t}\big| \ge \big|e^{2cR} e^{-i2\pi t}\big| - 1 = e^{R\sqrt{2\pi}} - 1 > 0$. I båda fallen ger dessa olikheter och ML-uppskattning

$$\left| \int_{V_R^{\pm}} g(z)\,dz \right| \le \frac{e^{-R^2}}{1 - e^{-R\sqrt{2\pi}}} \cdot |c| \to 0, \qquad R \to \infty,$$

så $\int_{V_R^{\pm}} g(z)\,dz \to 0$ då $R \to \infty$.

Låt slutligen $R \to \infty$ i $(*)$. Då får vi $I + 0 + 0 = \sqrt{\pi}$, d.v.s. $I = \sqrt{\pi}$, vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2024-01-13, kommentarer

1. (a) Några förenklar inte bråket $(3+i)/(2-i) = 1+i$, och då blir det svårt att hitta argumenten. Att sätta $w = e^{i2z}$ är klart enklast, men om man sätter $w = e^{iz}$ i stället, vilket flera gjorde, får man ekvationen $w^2 = 1+i$, som (om man inte observerar att $w^2 = e^{i2z}$) lämpligen löses som en binomisk ekvation så att man får lösningarna i polär form, vilket passar bra vid logaritmeringen i nästa steg: $iz = \log w$. Att däremot lösa den i rektangulär form gör det svårt att hitta bra uttryck för argumenten ($\pi/8$ är ju inte en standardvinkel.)

   (b) Flera tror att cirkelcentrum avbildas på cirkelcentrum med Möbius och får $c = w(2)$ (FEL).

2. (a) Några har bytt integrationsväg och integrerar typiskt längs sträckan från $i\pi$ till 0 och sedan längs sträckan från 0 till 1, och det går bra FÖRUTSATT ATT man påpekar att integranden är analytisk i $\mathbb{C}$ (det räcker i och för sig att den är analytisk i en omgivning till den slutna triangelytan med hörn $i\pi$, 0 och 1). I annat fall behöver inte integralen vara oberoende av vägen från $i\pi$ till 1.

   Några använder inte komplex primitiv funktion utan parametriserar sträckan (REKOMMENDERAS EJ), typiskt med $z(t) = (1-t)\cdot i\pi + t\cdot 1 = i\pi + (1-i\pi)t$, $t: 0 \to 1$, och får då

$$\int_L z\,e^z\,dz = \int_0^1 \bigl(i\pi + (1-i\pi)t\bigr)e^{i\pi+(1-i\pi)t}(1-i\pi)\,dt = (-1+i\pi)\int_0^1 \bigl(i\pi + (1-i\pi)t\bigr)e^{(1-i\pi)t}dt,$$

   som kan lösas med partiell integration, men det blir jobbigare (och det är lätt att göra fel).

   (b) En handfull studenter tror att det är värdena på e^z i de singulära punkterna, alltså $-1/3$ och -2, som direkt bestämmer konvergensradien och får då $R = 1/3$ (FEL); det är ju z-värdena i singulariteterna som gör det.

3. Integralen är rent reell och måste därför ha ett reellt värde. (Med omskrivningen $(x^2-6x+10)^3 = ((x-3)^2+1)^3$ ser man t.o.m. att den måste ha ett positivt värde.)

   Ett vanligt fel är att missa nämnaren 2! vid residyberäkningen i en trippelpol.

   Flera gör fel vid ML-uppskattningen, och skriver saker som $|z^2-6z+10| \le |z|^2+6|z|+10 = R^2+6R+10$ (visserligen sant, men eftersom uttrycket står i nämnaren går olikheten åt fel håll), $|z^2-6z+10| \ge |z^2-6z-10|$ (FEL, motexempel $z=1$) eller $|z^2-6z+10| \ge |z|^2-6|z|+10$ (FEL, motexempel $z = 4+i$); det rätta är att $|z^2-6z+10| \ge |z|^2-6|z|-10 = R^2-6R-10 > 0$ på C_R^+ för stora R.

4. Svar $\notin \{0,1,2,3,4\}$ är orimliga.

   Självklart behöver man inte utnyttja att u är jämn och v är udda, utan i stället kan man ha med alla reella y i teckentabellen.

   Det går som vanligt bra att bara faktorisera den ena av u och v, men då måste man ha med tecknen för både u och v för stora positiva och negativa y som extra kolumner i teckentabellen, lämpligen betecknade med $y = \pm\infty$, se Anmärkning 6.7 i kompendiet 2023. Annars framgår det inte i vilka kvadranter kurvan startar och slutar, och vad argumenttillskottet då blir är oklart.

   Några har gjort mindre fel, som att få faktoriseringen $v = -y(y^2+9)$ (FEL), men ett sådant fel ändrar uppgiftens karaktär i grunden och den blir mycket enklare (ett s.k. förstörande räknefel).

5. Det vanligaste felet här är att tro (eller chansa på?) att samma log-gren kan användas både för grenen till $z^{1/3}$ och grenen till $\log z$ (FEL); det visar sig nämligen att det *inte* går här.

   Som en lätt modifiering av lösningsskissen går det bra att börja med att skriva de två log-grenarna som $\ln|z| + i\,\theta_1(z)$ respektive $\ln|z| + i\,\theta_2(z)$, vilket några studenter också gjorde. Sedan väljer man $\theta_{1,2}(1)$ bland möjliga argument för 1 så att kraven i uppgiften uppfylls, och när detta är gjort blir $\theta_{1,2}(z)$ entydigt bestämda i Ω (notera att $\theta_{1,2}(1) = \theta_{1,2}(-1) + \pi$ p.g.a. hur vi har klippt upp $\mathbb{C}$).

   Några få trodde att summan av två komplexa tal är reell endast om de ingående termerna är reella, vilket naturligtvis är FEL (t.ex. är ju $(2+i) + (3-i) = 5$).

6. Den svåra delen av uppgiften är ML-uppskattningarna på de sneda sträckorna i parallellogrammen, och för godkänd uppgift måste man ha gjort dessa rätt (bortsett möjligen från något mindre räknefel).

Lars Alexandersson, 29 januari 2024