Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA45
Modul: TEN1

Tentamen i Komplex analys

2024-03-15 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – UPGn godkänd ($n = 1, 2, 3$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/11/14 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/3 UPG-omgångar är godkända.

Svar finns preliminärt kl 21.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Bestäm alla hela analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att

$$v = \operatorname{Im} f = 2x^2 - 2y^2 - y - \cosh x \sin y, \qquad f(0) = 3.$$

   f ska uttryckas i variabeln z, alltså som $f(z)$. (2p)

   (b) Var är avbildningen

$$w = (z-2)\,e^z$$

   inte konform, och hur avbildar den skärningsvinklar mellan kurvor där? (1p)

2. Bestäm Laurentserien för

$$f(z) = \frac{6}{z^2+9}$$

   i följande områden: (a) $|z| > 3$ (b) $1 < |z - 2i| < 5$. (1p+2p)

3. Bestäm antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^3 - iz^2 - (4-2i)z + 3i$$

   har i följande områden: (a) $|z| < 3$ (b) $\operatorname{Im} z < 0$. (1p+2p)

Var god vänd!

Del B

4. Beräkna med residykalkyl
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta.$$

5. Låt Ω vara den del av cirkelskivan $|z| < \sqrt{2}$ där $\operatorname{Im} z < 1$.

   (a) Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar Ω på en sektor
$$0 < \operatorname{Arg} w < \alpha$$
   och bestäm speciellt vinkeln α. (2p)

   (b) Bestäm en funktion h som är harmonisk i Ω och som har följande värden på randen $\partial\Omega$:
$$\begin{cases} h = 0 & \text{på cirkelbågen } |z| = \sqrt{2},\ \operatorname{Im} z < 1, \\ h = 1 & \text{på sträckan } |z| < \sqrt{2},\ \operatorname{Im} z = 1. \end{cases}$$
   (1p)

6. (a) Antag att f är en hel funktion och att C är en enkel sluten positivt orienterad $\mathcal{C}^1$-kurva i $\mathbb{C}$. Om z ligger innanför C, formulera Cauchys integralformel för förstaderivatan $f'(z)$ i denna situation. (1p)

   (b) Bevisa Liouvilles sats med hjälp av (a). (2p)
   (Att bevisa Liouvilles sats på annat sätt ger 0p på (b).)

TATA45 Komplex analys 2024-03-15, lösningsskisser

1. (a) Vi använder Cauchy-Riemanns ekvationer, och får $v'_y = -4y - 1 - \cosh x \cos y = u'_x$, som integrerad m.a.p. x ger $u = -4xy - x - \sinh x \cos y + \varphi(y)$, där φ är en reellvärd funktion av en reell variabel. Derivering m.a.p. y och insättning i $u'_y = -v'_x$ ger sedan $\varphi'(y) = 0$, alltså $\varphi(x) = A$, där A är en reell konstant. Vi får

$$f = u + iv = (-4xy - x - \sinh x \cos y + A) + i(2x^2 - 2y^2 - y - \cosh x \sin y),$$

och eftersom $3 = f(0) = u(0,0) + i\,v(0,0) = A + i0$ får vi $A = 3$. f är alltså en hel funktion, och på realaxeln (där $y = 0$) är $f(x) = (-x - \sinh x + 3) + i(2x^2)$, som också är värdena på realaxeln av den hela funktionen $g(z) = 2iz^2 - z + 3 - \sinh z$. Entydighetssatsen ger därför att $f(z) = g(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Svar: $f(z) = 2iz^2 - z + 3 - \sinh z$.

(b) $w(z) = (z-2)e^z$ är en hel analytisk funktion, och den är *inte* konform precis där

$$w'(z) = (z-1)e^z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1.$$

Eftersom $w''(z) = z\,e^z$ och därmed $w''(1) = e \neq 0$ fördubblar $w(z)$ skärningsvinklar mellan kurvor i $z = 1$ (men orienteringen bevaras).

Svar: $w(z)$ är inte konform i $z = 1$, och där fördubblar den skärningsvinklar mellan kurvor.

2. Att $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ när $|q| < 1$ ger oss följande utvecklingar i de två områdena:

(a)
$$\frac{6}{z^2+9} = \frac{6}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + 9/z^2} = \frac{6}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{9}{z^2}\right)^n = \underline{\underline{6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n}{z^{2n+2}}}}, \quad |z| > 3.$$

(b)
$$\frac{6}{z^2+9} = \frac{6}{(z+3i)(z-3i)} = \frac{i}{z+3i} + \frac{-i}{z-3i} = \Big/ \begin{array}{c} w = z - 2i \\ 1 < |w| < 5 \end{array} \Big/ = \frac{i}{w+5i} - \frac{i}{w-i}$$
$$= \frac{i}{5i} \cdot \frac{1}{1 + w/5i} - \frac{i}{w} \cdot \frac{1}{1 - i/w} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{5i}\right)^n - \frac{i}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{w}\right)^n$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2i)^n}{(5i)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{(z-2i)^{n+1}}}}, \quad 1 < |z - 2i| < 5.$$

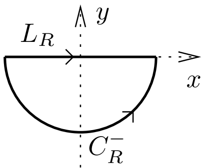
3. (a) Sätt

$$f(z) = z^3 \quad \text{och} \quad g(z) = -iz^2 - (4-2i)z + 3i.$$

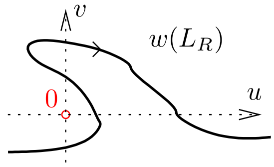
På cirkeln $|z| = 3$ är $|f(z)| = |z|^3 = 27$ och $|g(z)| \le |i||z|^2 + |4-2i||z| + |3i| = 12 + 3\sqrt{20} < 27$ eftersom $\sqrt{20} < 5$; således är $|f(z)| > |g(z)|$ för alla z på denna cirkel. Enligt Rouchés sats har därför $p(z) = f(z) + g(z)$ lika många nollställen i $|z| < 3$ som $f(z)$, d.v.s. tre.

Svar: Tre.

(b) Vi studerar argumenttillskottet för $p(z) = z^3 - iz^2 - (4-2i)z + 3i$ när z genomlöper kurvan $\Gamma_R = C_R^- - L_R$ (se figur nere till vänster; observera orienteringen).
På C_R^- får vi tillskottet $\Delta_{C_R^-} \arg p(z) = \Delta_{C_R^-} \arg z^3 + \Delta_{C_R^-} \arg\big(1 - i/z - (4-2i)/z^2 + 3i/z^3\big) \to 3 \cdot \pi + 0 = 3\pi$ då $R \to \infty$.
På L_R får vi $p(z) = p(x) = (x^3 - 4x) + i(3 + 2x - x^2) = (x-2)x(x+2) + i\,(x+1)(3-x) = u + iv$, och därmed följande teckentabell för u och v:



x	$<$	-2	$<$	-1	$<$	0	$<$	2	$<$	3	$<$
u	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
v	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$



Dessutom får vi av gradskäl att $v/u \to 0$ då $x \to \pm\infty$ (u drar mer än v), och detta tillsammans med tabellen ovan ger figuren ovan till höger, där vi ser att $\Delta_{L_R} \arg p(z) \to \pi$ då $R \to \infty$. Antalet nollställen i undre halvplanet blir därför $(1/2\pi) \lim_{R\to\infty} (\Delta_{C_R^-} \arg p(z) - \Delta_{L_R} \arg p(z)) = (3\pi - \pi)/2\pi = 1$, eftersom poler saknas, allt enligt argumentprincipen.

Svar: Ett.

4. Med $z = e^{i\theta}$ får vi, där C är den positivt orienterade enhetscirkeln $|z| = 1$ tagen ett varv,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{5 - 4\cos\theta} = \int_C \frac{(z^2 + z^{-2})/2}{5 - 4(z + z^{-1})/2} \cdot \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{4i} \int_C \frac{z^4 + 1}{z^2(z^2 - 5z/2 + 1)}\, dz.$$

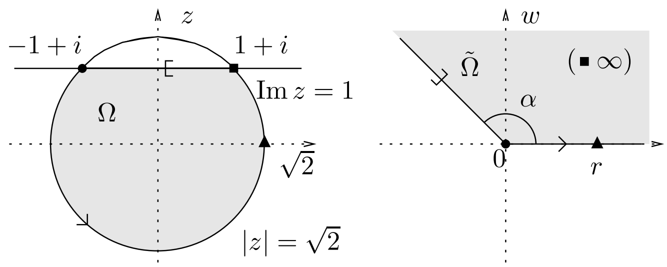
Eftersom $z^2 - 5z/2 + 1 = (z - 1/2)(z - 2)$ ser vi att integranden har singulariteterna $z = 0$ (dubbelpol) och $z = 1/2$ (enkelpol) innanför C – singulariteten $z = 2$ ligger ju utanför – så residysatsen och sedvanlig residyberäkning ger

$$I = -\frac{1}{4i} \cdot 2\pi i \cdot \left(\frac{d}{dz}\left(\frac{z^4+1}{z^2 - 5z/2 + 1}\right)\Big|_{z=0} + \frac{(z^4+1)/z^2}{\frac{d}{dz}(z^2 - 5z/2 + 1)}\Big|_{z=1/2} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \left(\frac{4z^3(z^2 - 5z/2 + 1) - (z^4+1)(2z - 5/2)}{(z^2 - 5z/2 + 1)^2}\Big|_{z=0} + \frac{(z^4+1)/z^2}{2z - 5/2}\Big|_{z=1/2} \right) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{17}{6}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}.$$

5. (a) Vi ser att skärningspunkterna mellan cirkeln $|z| = \sqrt{2}$ och linjen $\operatorname{Im} z = 1$, d.v.s. mellan $x^2 + y^2 = 2$ och $y = 1$, ges av $(x, y) = (\pm 1, 1)$, d.v.s. $z = \pm 1 + i$, och dessa punkter måste, i någon ordning, avbildas på 0 och ∞ för att åstadkomma en sektor i w-planet m.h.a. en Möbiusavbildning $w(z)$; vi väljer $w(-1 + i) = 0$ och $w(1 + i) = \infty$. Cirkelbågen och sträckan som utgör randen $\partial\Omega$ i z-planet kommer nu att avbildas på var sin stråle från $w = 0$, eftersom Möbiusavbildningar avbildar (delar av) $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar på (delar av) $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar.

För att cirkelbågen ska avbildas på positiva realaxeln låter vi $w(\sqrt{2}) = r$, där $r > 0$ (som vi väljer senare, men man kan, om man vill, redan nu låta $r = 1$, t.ex.). Konformiteten gör att området till vänster avbildas på området till vänster, se genomloppsriktningarna i figuren.



Att $(-1 + i, 1 + i) \mapsto (0, \infty)$ ger ansatsen $(w - 0)/1 = k(z + 1 - i)/(z - 1 - i)$, och insättning av $w(\sqrt{2}) = r$ ger $k = (1 - i)r/(2 + \sqrt{2})$; vi väljer $r = 2 + \sqrt{2}$ för att få ett enkelt uttryck: $w = (1 - i)(z + 1 - i)/(z - 1 - i)$.

Vinkeln α kan bestämmas geometriskt i z-planet, tack vare konformiteten, men man kan också använda att t.ex. $z = i$ ligger på sträckan och $w(i) = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}$ därför ligger på den sneda strålen; således är $\alpha = 3\pi/4$.

(b) En harmonisk funktion h i området $\tilde{\Omega}$ i w-planet som uppfyller att $h = 0$ då $\operatorname{Arg} w = 0$ och $h = 1$ då $\operatorname{Arg} w = \alpha$ är $h = (\operatorname{Arg} w)/\alpha$, eftersom $\operatorname{Arg} w = \operatorname{Im}(\operatorname{Log} w)$ och $\operatorname{Log} w$ är analytisk i $\tilde{\Omega}$; således är $h(z) = (\operatorname{Arg} w(z))/\alpha$ en harmonisk funktion i Ω med rätt randvärden.

<u>Svar</u>: (a) $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ (entydigt), $w = (1 - i)\dfrac{z + 1 - i}{z - 1 - i}$ (t.ex.); (b) $h(z) = \dfrac{4}{3\pi} \operatorname{Arg} w(z)$ (entydigt).

6. (a) Cauchys integralformel för förstaderivatan om z ligger innanför C, en enkel sluten positivt orienterad $\mathcal{C}^1$-kurva i $\mathbb{C}$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z)^2}\, ds.$$

(b) Liouvilles sats säger att en hel funktion som är begränsad måste vara konstant. Att f är begränsad i $\mathbb{C}$ betyder att det finns en konstant $M \geq 0$ sådan att $|f(s)| \leq M$ för alla $s \in \mathbb{C}$, och vi antar i fortsättningen att detta gäller.

Fixera $z \in \mathbb{C}$, och låt $R > |z|$. Då är, med $C = C_R$, cirkeln med radie R i (a), och ML-uppskattning

$$(*) \qquad |f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(s)}{(s - z)^2}\, ds \right| \leq \frac{M}{(R - |z|)^2} \cdot R, \qquad R > |z|,$$

eftersom $|s - z| \geq |s| - |z| = R - |z| > 0$ på C_R. Detta gäller för alla $R > |z|$, så genom att låta $R \to \infty$ för vårt fixa z i $(*)$ inser vi att $f'(z) = 0$. Men $z \in \mathbb{C}$ är godtyckligt, så $f'(z) = 0$ för alla $z \in \mathbb{C}$, varför f är konstant, vilket skulle bevisas.

TATA45 Komplex analys 2024-03-15, kommentarer

1. (a) Det går också bra att börja med ekvationen $v'_x = 4x - \sinh x \sin y = -u'_y$ i stället, vilket ger $u = -4xy - \sinh x \cos y + \psi(x)$, och insättning i $u'_x = v'_y$ ger sedan $\psi(x) = -x + A$; resten blir som i lösningsskissen.

   Några få gör ett mindre fel som gör att svaret blir uppenbart orimligt, t.ex. att $f(z)$ blir ett polynom i z (då kan ju $\operatorname{Im} f$ omöjligen innehålla termen $\cosh x \sin y$).

   Några försöker skriva om $f(x, y)$ till $f(z)$ utan att använda entydighetssatsen, vilket jag avråder från – det är lätt att göra något räknefel då.

   (b) Väldigt få lämnade in denna uppgift. Synd, för det är en snabb och billig poäng.

2. Det går bra att svara med en summa av flera serier, som i lösningsskissen.

   Man kan använda partialbråksuppdelningen även i (a) om man vill, och då får man serien på formen $\sum_{n=0}^{\infty}\big((-3)^n - 3^n\big)i^{n+1}/z^{n+1}$.

   Att skriva den geometriska serien FEL, typiskt $1/(1+q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ eller $1/(1-q) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ eller $1/(1-q) = \sum_{k=0}^{n} q^k$ i stället för det korrekta $1/(1-q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ för $|q| < 1$, gör att hela uppgiften blir underkänd (högst 1p totalt).

3. (a) gick riktigt bra, och det var inte många som gjorde något av de "klassiska" felen, se tentan 2021-01-16 för en allmän diskussion.

   (b) gick däremot sämre än väntat, främst beroende på att alltför många inte kunde läsa av argumenttillskottet från en visserligen korrekt kurva. Några trodde också att $v = (x+1)(x-3)$ i stället för $v = -(x+1)(x-3)$ (grundkursFEL).

4. Integralen är reell, så icke-reella svar är orimliga.

   Det absolut vanligaste felet här var att att inte observera att $z^2 + z^{-2}$ är singulär i origo. Som en konsekvens hittar man endast singulariteten $z = 1/2$ innanför enhetscirkeln, och beräknar man residyn rätt där får man att integralen $= 17\pi/12$ (FEL) i stället för det korrekta $\pi/6$.

   Några blandar ihop θ-intervallet $[0, 2\pi]$ med enhetscirkeln $C : |z| = 1$ och tror att integralen $\int_0^{2\pi}\big((\cos 2\theta)/(5 - 4\cos\theta)\big)\,d\theta = \int_C\big((\cos 2z)/(5 - 4\cos z)\big)\,dz$ eller liknande (FEL).

   Ett fåtal trodde att $\int_0^{2\pi}\big((\cos 2\theta)/(5 - 4\cos\theta)\big)\,d\theta = \operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\big(e^{i2\theta}/(5 - 4\,e^{i\theta})\big)\,d\theta$ (FEL); observera att $\operatorname{Re}(w_1/w_2) \neq (\operatorname{Re} w_1)/(\operatorname{Re} w_2)$ normalt.

5. Om man låter $(1+i, -1+i) \mapsto (0, \infty)$, alltså omvänt mot i lösningsskissen, blir räkningarna faktiskt lite lättare, i synnerhet om man kompletterar med att $i \mapsto 1$; då får man $w = (1+i-z)/(z+1-i)$ och $h = 1 - (4/3\pi)\operatorname{Arg} w(z)$.

   Observera att man måste vara försiktig när man väljer det tredje punktparet. Att $(1+i, -1+i) \mapsto (0, \infty)$ eller omvänt gör att Ω avbildas på en sektor $\beta < \tilde{\theta} < \beta + 3\pi/4$ i w-planet för något β, men vi vill ju ha $\beta = 0$ här. Det ordnar man genom att välja en punkt på sträckan eller cirkelbågen i z-planet och avbilda på rätt stråle i w-planet; väljer man fel stråle här får man i stället sektorn $-3\pi/4 < \operatorname{Arg} w < 0$. Värre är att t.ex. avbilda en inre punkt i Ω på en inre punkt i $\tilde{\Omega}$ – då kan sektorn ligga lite hur som helst, och man måste verifiera i efterhand att bilden blir den rätta (om man nu har råkat få rätt sektor).

   Vad gäller själva vinkeln α kan man genom att rita en halv kvadrat med hörn 0, i och $-1+i$ (eller $1+i$) i figuren i z-planet lätt se att $\alpha = \pi/2 + \pi/4$.

   I (b)-uppgiften gör en del felet att tro att $h = A\ln|w| + B$ är en relevant harmonisk funktion i w-planet (FEL), men den är ju konstant på *cirklar* och inte på *strålar*, vilket är vad vi vill ha här.

6. Man kan få ett något enklare bevis om man i (b) väljer cirklarna $|s - z| = R$ för fixt z; då blir, med ML-uppskattning, $|f'(z)| \le M/R$, vilket en student också gjorde.

Lars Alexandersson, 20 mars 2024