

(Förklarande text i rött kommer inte att finnas med på de riktiga tentorna.)

Nedanstående format kommer tentorna att ha fr.o.m. januari 2024. Det finns inga lösningar till just denna exempeltenta, men uppgifterna är ofta hämtade från gamla tentor där lösningar finns.

Använd denna exempeltenta mest till att bekanta er med det nya formatet och för att få en detaljerad förklaring av hur godkända UPG-omgångar tillgodoräknas.

Exempeltentamen i Komplex analys

2024-??-?? kl ??:00–??:00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – UPG n godkänd ($n = 1, 2, 3$).

Godkänd UPG n är i första hand en försäkring som gör att ni inte blir underkända på hela tentan ifall ni får 0 poäng på uppgift n ; ni kan dock inte få överbetyg i så fall.

(Till följd av ett centralt beslut om att införa bedömningskriterier i alla våra kurser måste vi examinatorer kräva att ni presterar något inom varje del av kursen.)

Observera att godkänd UPG n inte ger någon extra poäng på uppgift n . Det är fortfarande det ni presterar på själva tentan som avgör poängen på uppgift n .

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/11/14 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/3 UPG-omgångar är godkända.

Förutsatt att ni har 3 godkända uppgifter (och uppfyller krav K1) kan godkända UPG-omgångar således ge extra poäng ifall ni inte har nått upp till 8 poäng.

Svar finns tidigast xxxxx på kursens hemsida.

Del A

Här på del A hör uppgifterna till specifika delar av kursen: uppgift 1 tas från kapitel 1, 2 och 7; uppgift 2 från kapitel 3 och 4; och uppgift 3 från kapitel 5 och 6. Uppgifterna här *kan*, men *måste inte*, vara uppdelade.

Ni får som sagt inte nolla uppgift n om ni inte har UPG n godkänd ($n = 1, 2, 3$).

1. (a) Lös ekvationen

$$\cos z - i \sin z = 1 + i.$$

Svara i rektangulär form, d.v.s. i formen $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(1p)

(b) Bestäm alla hela analytiska funktioner $f = u + iv$ sådana att

$$u = \operatorname{Re} f = \cos x \cosh y - xy, \quad f(0) = 1 + i.$$

f ska uttryckas i variabeln z , alltså som $f(z)$. (2p)

Det kan dyka upp frågor på kapitel 7 (Möbiusavbildningar m.m.) redan här på uppgift 1, trots att det inte ingår i UPG1.

2. Bestäm Laurentserien för

$$\frac{1}{z^2 + 9}$$

i följande områden: (a) $|z| > 3$ (b) $2 < |z - i| < 4$. (1p+2p)

3. Beräkna

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

Del B

Här på del B kan uppgifterna tas från hela kursen, utan någon särskild ordning. Uppgift 4 ligger på ungefär samma svårighetsnivå som uppgifterna på del A, medan uppgifterna 5 och 6 i regel är svårare eller mera teoretiska.

4. Bestäm en Möbiusavbildning $w(z)$ som avbildar cirkelskivan $|z - i| < 2$ på halvplanet $\operatorname{Re} w > 1$ samtidigt som $w(0) = 2$ och $w(2 + i) = \infty$. Bestäm sedan bilden i w -planet av imaginäraxeln i z -planet.

5. Bestäm för alla $A \in \mathbb{R}$ antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^4 - 2z^3 - 2z + A$$

har i vänstra halvplanet $\operatorname{Re} z < 0$.

6. (a) Formulera maximumprincipen i begränsade områden.

(b) Bestäm maximum av $|z^2 + z + i|$ då $|z| \leq 1$, och ange var det antas.

(c) Antag att f är analytisk i en omgivning till ringen $1 \leq |z| \leq 2$ och att $|f| \leq 1$ då $|z| = 1$ och $|f| \leq 4$ då $|z| = 2$. Visa att $|f(z)| \leq |z|^2$ i ringen.

Lägg märke till att tentorna inte längre kommer att ha någon uppgift 7. Sjuorna har alltid varit "utom tävlan" i meningen att trots att man kan lösa dem med material från TATA45 har de i regel varit så svåra att nästan inga poäng har delats ut på dem – de få gånger detta har skett har det ändå inte påverkat betyget.

Så se det som att ni får mer tid att lösa övriga sex uppgifter och att ni slipper ödsla tid på en uppgift som nästan aldrig ger några poäng!

Lars Alexandersson, 4 december 2023