Uppgifter 3 i TATA49 Geometri med tillämpningar

I följande är koordinaterna homogena, om inte sagt annat. Beräkningar görs med fördel med MATLAB.

**Exercise 1** *Visa att diagonala punkterna till fyrhörningen* $A(1,0,-1)$, $B(0,-2,2)$ *och* $C(1,0,1)$ *och* $D(0,1,1)$ *bildar hörnen till en triangel. Kontrollera först att det bildar en fyrhörning.*

**Exercise 2**

1. *Visa att de tre punkterna* $A(1,1,-1)$, $B(8,2,-2)$ *och* $C(0,-1,1)$ *är kollinjära och ange 2 mängd koordinaterna av* $A$ *m.a.p.* $B, C$ *samt homogena koordinaten av* $A$ *m.a.p.*$B, C$.

2. *Visa att linjerna* $l[2,1,0]$, $m[1,1,1]$ *och* $n[5,4,3]$ *är konkurrenta och ange 2 mängd koordinaterna av* $n$ *m.a.p.* $l, m$ *samt homogena koordinaten av* $n$ *m.a.p.* $l, m$.

**Exercise 3** *Ange matrisen(erna) för projektiviteten från punkt-knippe med baspunkter* $B, C$ *ovan till linje-knippe med baslinjer* $l, m$ *ovan som tar punkten* $B$ *till linje* $m$, *punkten* $C$ *till linje* $n$ *och punkten* $A$ *till linjen* $l$.

**Exercise 4** $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ *är dina födelsedagsparametrar som i Uppgiftsblad nr. 1 och 2. Ange matris för projektiviteten som tar element* $(1,0)$ *till element* $(p_1, p_2)$, $(0,1)$ *till element* $(q_1, q_2)$ *och element* $(1,1)$ *till* $(r_2, r_1)$. *Är den en projektivitet?*

**Exercise 5** *Bestäm homogena koordinater för punkten* $D(d_1, d_2, d_3)$ *på det euklidiska planet vars dubbelförhållande med punkterna* $P(p_1, p_2, 1)$, $Q(q_1, q_2, 1)$ *och* $C = (\frac{r_2p_1+r_1q_1}{r_1+r_2}, \frac{r_2p_2+r_1q_2}{r_1+r_2}, 1)$ *är 1/2, där* $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ *som i Uppgift 4.*

*Bestäm punkten* $X(x_1, x_2, x_3)$ *på denna linje som gör harmonisk delning av med* $P, Q$ *och* $C$: $R(A, B, C, X) = -1$.

**Exercise 6** *Betrakta punkterna* $A(1,1,-1)$, $B(8,2,-2)$, $C(0,-1,1)$ *och* $D(3,0,0)$. *Visa att* $A, B, C$ *och* $D$ *är kollinjära och att* $Y(0,1,0)$ *hör inte till samma linje. Beräkna* $R(A,B,C,D)$. *Ange homogena koordinater för* $A$ *och* $B$ *om* $C$ *har koordinater* $(1,0)$ *och* $D$ *har koordinater* $(0,1)$, *dvs* $C$ *är oändligheten i linjen och* $D$ *är origo. Vad kan man säga av euklidiska positioner av* $A$ *och* $B$ *inom linjen?.*

**Exercise 7** *Bestäm kollineationen som tar punkten* $P(p_1, p_2, 1)$ *till* $Y(0,1,0)$, $Q(q_1, q_2, 1)$ *till* $Z(0,0,1)$, $R(r_1, r_2, 1)$ *till* $X(1,0,0)$ *och* $S(p_1+q_1+r_1, p_2+q_2+r_2, 3)$ *till* $U(1,1,1)$. $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ *som i Uppgift 4.*

**Exercise 8** *Bestäm kollineationen som tar linjen* $x[1,0,0]$ *till* $q[q_1, q_2, 1]$, $y[0,1,0]$ *till* $p[p_1, p_2, 1]$, $z[0,0,1]$ *till* $r[r_1, r_2, 1]$ *och* $u[1,1,1]$ *till* $s[p_1+q_1+r_1, p_2+q_2+r_2, 3]$. $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ *är dina födelsedagsparametrar som i Uppgiftsblad nr. 1 och 2.*

**Exercise 9** *Bestäm invarianta element till kollineationer i Uppgifter 8 oh 7. Är någon av dem perspektivistisk? En homologi?*

**Exercise 10** *Bestäm invarianta element till kollineationen med matris* $\begin{pmatrix} -7 & -5 & 5 \\ -10 & -12 & 10 \\ -20 & -20 & 18 \end{pmatrix}$. *Är kollineationen perspektivistisk? Är kollineationen en homologi?*

**Exercise 11** *Bestäm matris till en homologi med centrum* $C[q_1, q_2, 0]$ *och axeln* $p[p_1, p_2, 0]$, *med* $p_1, p_2, q_1, q_2$ *som ovan. Ledning: man får matriser som beror på en parameter.*

**Exercise 12** *Visa att om* $T$ *är en korrelation så är* $T{\cdot}T$ *en kollineation. Bestäm matrisen till* $T \cdot T$ *beroende på matrisen till* $T$.

**Exercise 13** *Låt* $T$ *vara en korrelation med matris* $\begin{pmatrix} q_1 & p_1p_2 & 0 \\ p_1p_2 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \end{pmatrix}$, *med* $p_1, q_1, q_2 r_1, r_2$ *som ovan, ingen är född 1990 och* $p_1p_2$ *talet med siffror* $p_1$ *och* $p_2$, *så januarimånad är 1 och decembermånad är 12. Bestäm mängden av självkonjugerade punkter. Är* $T$ *en elliptisk eller hyperbolisk korrelation? Motivera.*

**Exercise 14** *Låt* $T$ *vara en kollineation. Visa att om* $m$ *är polärlinje till* $P$ *m.a.p en andragradskurva* $\mathcal{C}$ *så är* $m' = T(m)$ *polärlinje till* $P' = T(P)$ *m.a.p. andragradskurvan* $T(\mathcal{C})$ *. Detta är mycket användbar i komplex analys och Moebius tranformationer.*

**Exercise 15** *Låt* $X, Y, Z$ *vara punkterna med koordinater* $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ *resp.* $[0, 0, 1]$. *Visa att om* $P[p_1, p_2, p_3]$ *är en punkt olik* $Z$ *så är koordinaterna för punkten* $P' = ZP \cdot XY$ *som följande:* $[p_1, p_2, 0]$. *Observera att kollineationen som tar* $P$ *till* $P'$ *är centralprojektionen från origo, dvs* $Z$, *på den ideella linjen. Det vill säga en homologi med centrum origo och axeln den ideella linjen.*

$P' = ZP \cdot XY$ *betyder att* $P'$ *är skärningspunkten av* $ZP$ *och* $XY$.