TATA53 Föreläsning 3

Linjär algebra överkurs

Jonathan Nilsson

Linköping Universitet

Part I

Spektralteori

Egenvärden och egenvektorer

Definition

Låt V vara ett $\mathbb{F}$-vektorrum, och låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning. Om $v \neq 0$ och $\lambda \in \mathbb{F}$ uppfyller

$$F(v) = \lambda v$$

så kallas v för en **egenvektor** för F med **egenvärdet** λ.

Egenvärden och egenvektorer

Definition

Låt V vara ett $\mathbb{F}$-vektorrum, och låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning. Om $v \neq 0$ och $\lambda \in \mathbb{F}$ uppfyller

$$F(v) = \lambda v$$

så kallas v för en **egenvektor** för F med **egenvärdet** λ.
För $\lambda \in \mathbb{F}$ definierar vi motsvarande **egenrum** E_λ som

$$E_\lambda = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(F - \lambda I).$$

Egenvärden och egenvektorer

Definition

Låt V vara ett $\mathbb{F}$-vektorrum, och låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning. Om $v \neq 0$ och $\lambda \in \mathbb{F}$ uppfyller

$$F(v) = \lambda v$$

så kallas v för en **egenvektor** för F med **egenvärdet** λ.
För $\lambda \in \mathbb{F}$ definierar vi motsvarande **egenrum** E_λ som

$$E_\lambda = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(F - \lambda I).$$

Vi definierar också **spektrum** $\sigma(F)$ för F som mängden egenvärden:

$$\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{F} \mid F(v) = \lambda v \text{ för något } v \neq 0\}.$$

Egenvärden och egenvektorer

Definition

Låt V vara ett $\mathbb{F}$-vektorrum, och låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning. Om $v \neq 0$ och $\lambda \in \mathbb{F}$ uppfyller

$$F(v) = \lambda v$$

så kallas v för en **egenvektor** för F med **egenvärdet** λ.
För $\lambda \in \mathbb{F}$ definierar vi motsvarande **egenrum** E_λ som

$$E_\lambda = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(F - \lambda I).$$

Vi definierar också **spektrum** $\sigma(F)$ för F som mängden egenvärden:

$$\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{F} \mid F(v) = \lambda v \text{ för något } v \neq 0\}.$$

Om $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ definierar vi också **spektralradien** $\rho(F) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(F)} |\lambda|$.

Exempel

Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen med standardmatris

$$[P] = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exempel

Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen med standardmatris

$$[P] = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Egenvärde	**Egenrum**
1	$E_1 = \mathrm{span}((1,2,3))$
0	$E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$

Exempel

Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen med standardmatris

$$[P] = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Egenvärde	**Egenrum**
1	$E_1 = \mathrm{span}((1,2,3))$
0	$E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$

Så avbildningens spektrum är $\sigma(P) = \{0,1\}$ och spektralradien är $\rho(P) = 1$.

Exempel

Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen med standardmatris

$$[P] = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Egenvärde	**Egenrum**
1	$E_1 = \mathrm{span}((1,2,3))$
0	$E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$

Så avbildningens spektrum är $\sigma(P) = \{0, 1\}$ och spektralradien är $\rho(P) = 1$. Geometriskt är avbildningen vinkelrät projektion på linjen $t(1,2,3)$.

Exempel

Låt $G : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ vara avbildningen som tar transponat:

$$G(A) = A^T$$

Exempel

Låt $G : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ vara avbildningen som tar transponat:

$$G(A) = A^T$$

Egenvärde	**Egenrum**
1	$E_1 =$ symmetriska matriser
-1	$E_{-1} =$ skev-symmetriska matriser

Exempel

Låt $G : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ vara avbildningen som tar transponat:

$$G(A) = A^T$$

Egenvärde	**Egenrum**
1	$E_1 =$ symmetriska matriser
-1	$E_{-1} =$ skev-symmetriska matriser

Så avbildningens spektrum är $\sigma(G) = \{1, -1\}$ och spektralradien är $\rho(G) = 1$.

Exempel

Låt $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vara avbildningen som tar derivatan:

$$D(f(x)) = f'(x)$$

Exempel

Låt $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vara avbildningen som tar derivatan:

$$D(f(x)) = f'(x)$$

Varje $\lambda \in \mathbb{R}$ är ett egenvärde, $E_\lambda = \mathrm{span}(e^{\lambda x})$.

Exempel

Låt $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vara avbildningen som tar derivatan:

$$D(f(x)) = f'(x)$$

Varje $\lambda \in \mathbb{R}$ är ett egenvärde, $E_\lambda = \mathrm{span}(e^{\lambda x})$.

Så avbildningens spektrum är $\sigma(D) = \mathbb{R}$ och spektralradien är $\rho(D) = \infty$.

Exempel

Betrakta avbildningen $(\mathbb{Z}_2)^2 \to (\mathbb{Z}_2)^2$ med avbildningsmatris $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_2)$.

Exempel

Betrakta avbildningen $(\mathbb{Z}_2)^2 \to (\mathbb{Z}_2)^2$ med avbildningsmatris $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_2)$.

Det finns bara tre nollskilda vektorer: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och ingen av dem är egenvektorer. Så $\sigma(A) = \varnothing$.

Karakteristiskt polynom

Definition

Låt $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. Det **karakteristiska polynomet** för A definieras som

$$p_A(t) = \det(A - tI).$$

Karakteristiskt polynom

Definition

Låt $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. Det **karakteristiska polynomet** för A definieras som

$$p_A(t) = \det(A - tI).$$

- $p_A(t)$ är ett polynom av grad n med koefficienter i $\mathbb{F}$.

Karakteristiskt polynom

Definition

Låt $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. Det **karakteristiska polynomet** för A definieras som

$$p_A(t) = \det(A - tI).$$

- $p_A(t)$ är ett polynom av grad n med koefficienter i $\mathbb{F}$.
- $p_A(t) = \det(A - tI) = \pm\det(tI - A)$

Karakteristiskt polynom

Definition

Låt $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. Det **karakteristiska polynomet** för A definieras som

$$p_A(t) = \det(A - tI).$$

- $p_A(t)$ är ett polynom av grad n med koefficienter i $\mathbb{F}$.
- $p_A(t) = \det(A - tI) = \pm \det(tI - A)$
- $p_A(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda$ är ett egenvärde till A.

Karakteristiskt polynom

Definition

Låt $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$. Det **karakteristiska polynomet** för A definieras som

$$p_A(t) = \det(A - tI).$$

- $p_A(t)$ är ett polynom av grad n med koefficienter i $\mathbb{F}$.
- $p_A(t) = \det(A - tI) = \pm \det(tI - A)$
- $p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ är ett egenvärde till A.
- $p_A(t) = p_{SAS^{-1}}(t)$ så det karaketeristiska polynomet kan definieras för en avbildning $F : V \to V$ utan att specificera bas.

Algoritm

För att hitta egenvärden/egenvektorer för en matris $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$:

- Beräkna det karakteristiska polynomet $p_A(t) = \det(A - tI)$.
- Hitta nollställena för i $p_A(t)$ i kroppen $\mathbb{F}$, dessa är egenvärdena till A.
- För varje egenvärde λ, hitta en bas för egenrummet E_λ genom att lösa ekvationssystemet $(A - \lambda I)v = 0$.

Algoritm

För att hitta egenvärden/egenvektorer för en matris $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$:

- Beräkna det karakteristiska polynomet $p_A(t) = \det(A - tI)$.
- Hitta nollställena för i $p_A(t)$ i kroppen $\mathbb{F}$, dessa är egenvärdena till A.
- För varje egenvärde λ, hitta en bas för egenrummet E_λ genom att lösa ekvationssystemet $(A - \lambda I)v = 0$.

Om man börjar med en avbildning $F : V \to V$ kan man istället börja med att välja en bas för V och ta fram matrisen $A = [F]$ med avseende på den basen.

Egenvärdens multiplicitet

Definition

Låt λ vara ett egenvärde till A.
Den **algebraiska multipliciteten** m_λ för egenvärdet λ definieras som multipliciteten av nollstället λ i $p_A(t)$, d.v.s vi har en faktorisering

$$p_A(t) = (t-\lambda)^{m_\lambda} q(t) \text{ där } q(\lambda) \neq 0.$$

Egenvärdens multiplicitet

Definition

Låt λ vara ett egenvärde till A.
Den **algebraiska multipliciteten** m_λ för egenvärdet λ definieras som multipliciteten av nollstället λ i $p_A(t)$, d.v.s vi har en faktorisering

$$p_A(t) = (t - \lambda)^{m_\lambda} q(t) \text{ där } q(\lambda) \neq 0.$$

Den **geometriska multipliciteten** g_λ för egenvärdet λ definieras som

$$g_\lambda = \dim E_\lambda = \dim \ker(A - \lambda I).$$

Egenvärdens multiplicitet

Definition

Låt λ vara ett egenvärde till A.
Den **algebraiska multipliciteten** m_λ för egenvärdet λ definieras som multipliciteten av nollstället λ i $p_A(t)$, d.v.s vi har en faktorisering

$$p_A(t) = (t-\lambda)^{m_\lambda} q(t) \text{ där } q(\lambda) \neq 0.$$

Den **geometriska multipliciteten** g_λ för egenvärdet λ definieras som

$$g_\lambda = \dim E_\lambda = \dim \ker(A - \lambda I).$$

Exempel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. $p_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 3-t & 5 \\ 0 & 3-t \end{vmatrix} = (t-3)^2$ så enda egenvärdet är 3 och den algebraiska multipliciteten är $m_3 = 2$.

Egenvärdens multiplicitet

Definition

Låt λ vara ett egenvärde till A.
Den **algebraiska multipliciteten** m_λ för egenvärdet λ definieras som multipliciteten av nollstället λ i $p_A(t)$, d.v.s vi har en faktorisering

$$p_A(t) = (t-\lambda)^{m_\lambda} q(t) \text{ där } q(\lambda) \neq 0.$$

Den **geometriska multipliciteten** g_λ för egenvärdet λ definieras som

$$g_\lambda = \dim E_\lambda = \dim \ker(A - \lambda I).$$

Exempel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. $p_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 3-t & 5 \\ 0 & 3-t \end{vmatrix} = (t-3)^2$ så enda egenvärdet är 3 och den algebraiska multipliciteten är $m_3 = 2$.

Men $Av = 3v \Leftrightarrow (A-3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow v = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ så $g_3 = \dim E_3 = 1$.

Sats

För varje egenvärde λ till en linjär avbildning har vi

$$g_\lambda \leq m_\lambda$$

Sats

För varje egenvärde λ till en linjär avbildning har vi

$$g_\lambda \leq m_\lambda$$

Bevis: Låt V vara ett $\mathbb{F}$-vektorrum av dimension n och låt $F : V \to V$ ha ett egenvärde λ med geometrisk multiplicitet $g_\lambda = k$. Välj en bas för $\{v_1, \dots, v_k\}$ för E_λ och fyll ut till en bas $\mathcal{B}$ för hela V. Med avseende på denna bas får avbildningsmatrisen blockform

$$A = [F]_\mathcal{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right)$$

Ur detta får vi $p_A(t) = \det(A - tI) = (\lambda - t)^k \det(C - tI)$ så den algebraiska multipliciteten m_λ är *minst* k.

Diagonalisering

Sats

En matris $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ kallas **diagonaliserbar** om det finns n linjärt oberoende egenvektorer till A. Detta sker när $m_\lambda = g_\lambda$ för alla egenvärden och summan av alla algebraiska multipliciteter är n.

Diagonalisering

Sats

En matris $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ kallas **diagonaliserbar** om det finns n linjärt oberoende egenvektorer till A. Detta sker när $m_\lambda = g_\lambda$ för alla egenvärden och summan av alla algebraiska multipliciteter är n.

Säg att vi har n linjärt oberoende egenvektorer v_i med $Av_i = \lambda_i v_i$. Tag

$$S = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

då gäller $A = SDS^{-1}$, denna faktorisering är en **diagonalisering** av A.

Diagonalisering

Sats

En matris $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ kallas **diagonaliserbar** om det finns n linjärt oberoende egenvektorer till A. Detta sker när $m_\lambda = g_\lambda$ för alla egenvärden och summan av alla algebraiska multipliciteter är n.

Säg att vi har n linjärt oberoende egenvektorer v_i med $Av_i = \lambda_i v_i$. Tag

$$S = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

då gäller $A = SDS^{-1}$, denna faktorisering är en **diagonalisering** av A.

- I basen $(v_1, \ldots, v_n)$ blir avbildningensmatrisen D.
- $A^n = (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1}$.

Tillämpning: System av differentialekvationer

Exempel från förra kursen

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 5x_2(t) \end{cases}$$

Tillämpning: System av differentialekvationer

Exempel från förra kursen

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 5x_2(t) \end{cases}$$

Med $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ och $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ kan systemet skrivas $X' = AX$.

Tillämpning: System av differentialekvationer

Exempel från förra kursen

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 5x_2(t) \end{cases}$$

Med $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ och $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ kan systemet skrivas $X' = AX$.

Diagonaliserar vi $A = SDS^{-1}$ och tar $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = S^{-1}X$ får vi

$X' = AX \Leftrightarrow X' = SDS^{-1}X \Leftrightarrow Y' = DY$.
Vi får $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t) \Leftrightarrow y_i(t) = Ce^{\lambda_i t}$ och sedan $X = SY$.

Tillämpning: Talföljder

Exempel från förra kursen

Fibonacciföljden $F_1 = F_2 = 1$, och $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ för $n \geq 2$:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

Tillämpning: Talföljder

Exempel från förra kursen

Fibonacciföljden $F_1 = F_2 = 1$, och $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ för $n \geq 2$:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

Med $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ får vi $X_{n+1} = AX_n$ där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Så $X_{n+1} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, detta ger ett explicit uttryck för talföljden:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

Exempel

Låt F vara avbildningen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med avbildningsmatris

$$[F] = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Är avbildningen diagonaliserbar?

Exempel

Låt F vara avbildningen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med avbildningsmatris

$$[F] = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Är avbildningen diagonaliserbar?

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 - \lambda & \end{vmatrix} = t^2 + 1.$$

Men $t^2 + 1$ saknar nollställen i kroppen $\mathbb{R}$, så avbildningen *saknar egenvärden och egenvektorer*.
Geometriskt är avbildningen en rotation i planet.

Exempel

Låt G vara avbildningen $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ med avbildningsmatris

$$[G] = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Är A diagonaliserbar?

Exempel

Låt G vara avbildningen $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ med avbildningsmatris

$$[G] = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Är A diagonaliserbar?

$p_A(t) = t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$ så $\sigma(G) = \{i, -i\}$.

Exempel

Låt G vara avbildningen $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ med avbildningsmatris

$$[G] = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Är A diagonaliserbar?

$p_A(t) = t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$ så $\sigma(G) = \{i, -i\}$.

Lösning av $Av = iv \Leftrightarrow (A - iI)v = 0$ ger $v = s \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{C}$.

Lösning av $Av = -iv \Leftrightarrow (A + iI)v = 0$ ger $v = s \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{C}$.

Så A är diagonaliserbar: $A = SDS^{-1}$ där $S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Tillämpning

Exempel

Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) \end{cases}$$

där $x_1(0) = 0$ och $x_2(0) = 1$

Tillämpning

Exempel

Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) \end{cases}$$

där $x_1(0) = 0$ och $x_2(0) = 1$

Med matriserna från föregående slide:

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = SDS^{-1}X \Leftrightarrow Y' = DY \text{ där } Y = S^{-1}X.$$

I variablerna y_1, y_2 blir systemet nu

$$\begin{cases} y_1'(t) = iy_1(t) \\ y_2'(t) = -iy_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = Ce^{it} \\ y_2(t) = De^{-it} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = SY = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ce^{it} \\ De^{-it} \end{pmatrix}$$

vilket ger $x_1(t) = iCe^{it} - iDe^{-it}$ och $x_2(t) = Ce^{it} + De^{-it}$. Begynnelsevillkoren ger $C = D = \frac{1}{2}$, så $x_1(t) = -\sin(x) \qquad x_2(t) = \cos(x)$.

Egenvärden för komplexa matriser

Sats

Varje linjär operator $F : V \to V$ på ett *komplext* vektorrum har ett egenvärde.

Egenvärden för komplexa matriser

Sats

Varje linjär operator $F : V \to V$ på ett *komplext* vektorrum har ett egenvärde.

Bevis: Låt A vara en matris för avbildningen. $p_A(t)$ är ett icke-konstant polynom med komplexa koefficienter, varje sådant polynom har ett nollställe enligt algebrans fundamentalsats.

Triangulär form

Sats

Låt $F : V \to V$ vara en linjär operator på ett komplext ändligt-dimensionellt vektorrum. Då finns det en bas för V för vilken avbildningsmatrisen $[F]$ är övertriangulär.

Triangulär form

Sats

Låt $F : V \to V$ vara en linjär operator på ett komplext ändligt-dimensionellt vektorrum. Då finns det en bas för V för vilken avbildningsmatrisen $[F]$ är övertriangulär.

Bevis: Induktion på $\dim V$. Det finns $u_1 \in V$ så att $F(u_1) = \lambda v_1$. Fyll ut till en bas $(u_1, \dots, u_n)$ för V. Med avseende på denna bas har vi

$$[F] = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

där A är avbildningsmatrisen för en avbildning $U \to U$ där $U = \mathrm{span}(v_2, \dots, v_n)$. Enligt induktionsantagandet kan vi välja en ny bas $\mathrm{span}(v_2, \dots, v_n)$ så att avbildningsmatrisen blir en övertriangulär matris T. Med avseende på basen $(v_1, \dots, v_n)$ blir nu avbildningsmatrisen övertriangulär.

Triangulär form

Sats

Låt $F : V \to V$ vara en linjär operator på ett komplext ändligt-dimensionellt vektorrum. Då finns det en bas för V för vilken avbildningsmatrisen $[F]$ är övertriangulär.

Bevis: Induktion på $\dim V$. Det finns $u_1 \in V$ så att $F(u_1) = \lambda v_1$. Fyll ut till en bas $(u_1, \ldots, u_n)$ för V. Med avseende på denna bas har vi

$$[F] = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

där A är avbildningsmatrisen för en avbildning $U \to U$ där $U = \mathrm{span}(v_2, \ldots, v_n)$. Enligt induktionsantagandet kan vi välja en ny bas $\mathrm{span}(v_2, \ldots, v_n)$ så att avbildningsmatrisen blir en övertriangulär matris T. Med avseende på basen $(v_1, \ldots, v_n)$ blir nu avbildningsmatrisen övertriangulär.