TATA53 Föreläsning 5

Linjär algebra överkurs

Jonathan Nilsson

Linköping Universitet

Part I

Nilpotenta operatorer

Repetition: strängbaser

Låt $F : V \to V$ vara en nilpotent operator på ett ändligtdimensionellt vektorrum.

Definition

En **sträng** i V av längd n är en följd vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_n$ som uppfyller

$$F(v_1) = 0 \quad \text{och} \quad F(v_k) = v_{k-1} \text{ för } 2 \leq k \leq n.$$

$$v_n \mapsto v_{n-1} \mapsto \cdots \mapsto v_2 \mapsto v_1 \mapsto 0.$$

En bas för V bestående av ett antal strängar kallas för en **strängbas** för V.

Exempel

Låt $F : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ ha en strängbas $(e_1, \ldots, e_8)$ där F verkar enligt diagrammet nedan.

$$
\begin{array}{rcccccc}
e_3 & \mapsto & e_2 & \mapsto & e_1 & \mapsto & 0 \\
 & & e_5 & \mapsto & e_4 & \mapsto & 0 \\
 & & e_7 & \mapsto & e_6 & \mapsto & 0 \\
 & & & & e_8 & \mapsto & 0
\end{array}
$$

Exempel

Låt $F : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ ha en strängbas $(e_1, \dots, e_8)$ där F verkar enligt diagrammet nedan.

$$\begin{aligned} e_3 \mapsto e_2 \mapsto e_1 &\mapsto 0 \\ e_5 \mapsto e_4 &\mapsto 0 \\ e_7 \mapsto e_6 &\mapsto 0 \\ e_8 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

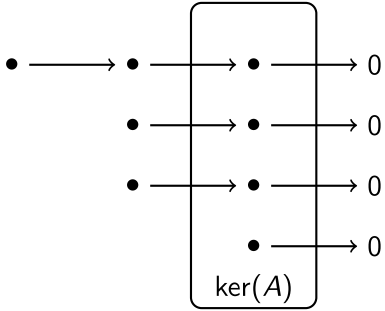
$$[F] = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Så för att jordanisera en nilpotent matris behöver vi hitta en strängbas.

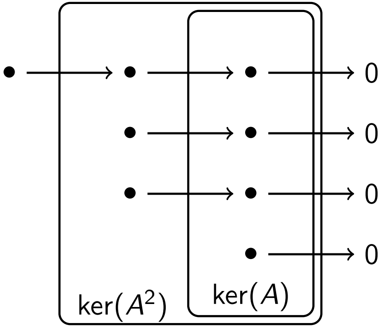
Antal kedjor och deras längder

$$\begin{array}{ccccccc}
\bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \bullet & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

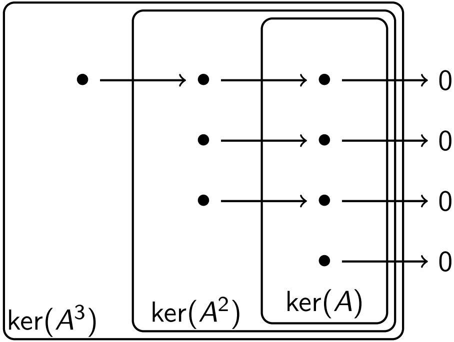
Antal kedjor och deras längder



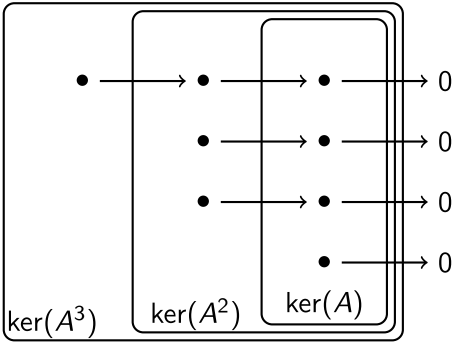
Antal kedjor och deras längder



Antal kedjor och deras längder



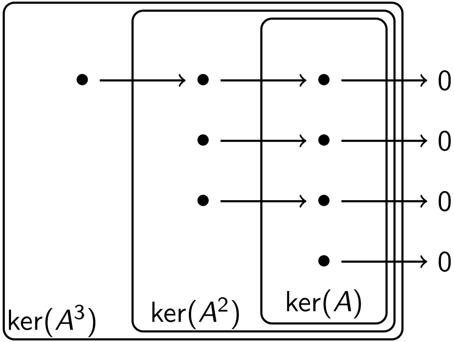
Antal kedjor och deras längder



$$n_0 = 0$$
$$n_1 = 4$$
$$n_2 = 7$$
$$n_3 = 8$$
$$n_4 = 8$$
$$\vdots$$

Med $n_k = \dim \ker(A^k)$ får vi att $\#$ kedjor av längd $\geq k$ är $n_k - n_{k-1}$

Antal kedjor och deras längder



$n_0 = 0$

$n_1 = 4 \quad d_1 = 1$

$n_2 = 7 \quad d_2 = 2$

$n_3 = 8 \quad d_3 = 1$

$n_4 = 8 \quad d_4 = 0$

$\vdots \quad \vdots$

Med $n_k = \dim \ker(A^k)$ får vi att # kedjor av längd $\geq k$ är $n_k - n_{k-1}$

kedjor av längd exakt k = # kedjor av längd $\geq k$ minus # kedjor av längd $\geq k+1$
$= d_k := (n_k - n_{k-1}) - (n_{k+1} - n_k) = 2n_k - n_{k-1} - n_{k+1}$

Jordaniseringsalgoritm för en nilpotent matris A

- Beräkna $A^2, A^3, A^4, \ldots$ tills $A^d = 0$.
- Ta fram en bas för $\ker(A)$, utvidga till en bas för $\ker(A^2)$, $\ker(A^3), \ldots$
- Låt $n_k = \dim(\ker(A^k))$ och beräkna $d_k = 2n_k - n_{k-1} - n_{k+1}$.
  Då är d_k antalet strängar av längd k i strängbasen.
- För varje stränglängd k från längst till kortast:
  - Låt $\mathcal{B}$ vara mängden tidigare valda vektorer (börja med $\mathcal{B} = \varnothing$)
  - Välj linjärt oberoende vektorer $v_1, \ldots, v_{d_k} \in \ker(A^{k+1})$ som också är linjärt oberoende med $\ker(A^k)$ och med $\mathcal{B}$
  - Varje sådan vald vektor är vänstra vektorn i en sträng, beräkna resten av strängen: $v_i, Av_i, A^2v_i, \ldots, 0$.
  - Lägg till alla dessa nollskilda vektorer till $\mathcal{B}$
- $\mathcal{B}$ är nu en strängbas, ordna den sträng för sträng från höger till vänster.
- Låt S vara matrisen som har vektorerna i $\mathcal{B}$ som kolonner. Låt J vara en Jordan-matris bestånde av Jordan-block $J_m(0)$ där storlekarna m motsvarar stränglängderna i basen.
- Nu har vi $A = SJS^{-1}$, vi har *jordaniserat* A.

Exempel

Jordanisera den nilpotenta matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hitta alltså en matris S och en matris J i Jordan-form så att $A = SJS^{-1}$.

Exempel

Jordanisera den nilpotenta matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hitta alltså en matris S och en matris J i Jordan-form så att $A = SJS^{-1}$.

Med föregående algoritm får vi exempelvis:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Part II

Jordans normalform

Jordaniseringsalgoritm för en matris A

- Ta fram det karakteristiska polynomet och lös $p_A(\lambda) = 0$ för att hitta egenvärdena.
- För varje egenvärde λ, gör följande:
  - Låt $\mathcal{B}$ vara mängden hittills valda vektorer (börja med $\mathcal{B} = \varnothing$).
  - Ta fram en bas för de generaliserade egenrummen $\tilde{E}_\lambda$ genom att beräkna $\ker((A - \lambda I)^k)$ for $k = 1, 2, \ldots$ tills sekvensen stabiliseras: $\ker((A - \lambda I)^n) = \ker((A - \lambda I)^{n+1})$, detta händer när $\dim \ker((A - \lambda I)^n))$ når den algebraiska multipliciteten för λ. Då är $\tilde{E}_\lambda = \ker((A - \lambda I)^n)$.
  - Låt $N := (A - \lambda I)|_{\tilde{E}_\lambda} : \tilde{E}_\lambda \to \tilde{E}_\lambda$. Denna operator är nilpotent.
  - Använd föregående algoritm för att ta fram en strängbas i $\tilde{E}_\lambda$ för operatorn N. Denna bas är en union av Jordan-kedjor för A med egenvärde λ, lägg till dessa strängar till $\mathcal{B}$.
- Nu innehåller $\mathcal{B}$ en Jordan-bas. Låt S vara matrisen vars kolumner är vektorerna i $\mathcal{B}$, sorterade kedja för kedja från höger till vänster. Låt J vara motsvarande Jordan-matris med block-storlekar och egenvärden motsvarande Jordan-kedjorna i S.
- Verifiera att $S^{-1}AS = J$.

Observationer om Jordans normalform

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observationer om Jordans normalform

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{matrix}} & & 0 & 0 & 0 \\ & & & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & & 0 \\ & & & & & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p_J(t) = (t-4)^5(t+1)^3$$
$$\dim(E_4) = 2$$
$$\dim(E_{-1}) = 2$$
$$m_J(t) = (t-4)^3(t+1)^2$$

- Algebraisk multiplicitet för λ $=$ Antal λ på diagonalen
- Geometrisk multiplicitet för λ $=$ Antal λ-Jordanblock
- Multiplicitet för λ i minimalpolynomet $=$ storlek på *största* λ-Jordanblocket

Exempel

Jordanisera matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Hitta alltså en matris S och en matris J i Jordan-form så att $A = SJS^{-1}$.

Exempel

Jordanisera matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Hitta alltså en matris S och en matris J i Jordan-form så att $A = SJS^{-1}$.

Med föregående algoritm får vi exempelvis:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exempel

Jordanisera matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hitta alltså en matris S och en matris J i Jordan-form så att $A = SJS^{-1}$.

Exempel

Jordanisera matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hitta alltså en matris S och en matris J i Jordan-form så att $A = SJS^{-1}$.

Vi får $p_A(t) = -(t-1)^3(t-3)^2$ så $\sigma(A) = \{1, 3\}$.

Kedjor för $\lambda = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kedjor för $\lambda = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker(A - I) = s(1, 1, 0, 0, 0) + t(1, 0, 1, 0, 1)$

Kedjor för $\lambda = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker(A - I) = s(1, 1, 0, 0, 0) + t(1, 0, 1, 0, 1)$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kedjor för $\lambda = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker(A - I) = s(1,1,0,0,0) + t(1,0,1,0,1)$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker((A - I)^2) = s(1,1,0,0,0) + t(-1,0,0,1,0) + r(1,0,1,0,1)$

Kedjor för $\lambda = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker(A - I) = s(1,1,0,0,0) + t(1,0,1,0,1)$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker((A - I)^2) = s(1,1,0,0,0) + t(-1,0,0,1,0) + r(1,0,1,0,1)$
Så vi söker en kedja av längd 2 och en av längd 1. Vi tar
$f_2 = (-1,0,0,1,0) \in \ker((A - I)^2) \setminus \ker(A - I)$ vilket ger $f_1 = (A - I)f_2 = (1,0,1,0,1)$.

Kedjor för $\lambda = 1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker(A - I) = s(1, 1, 0, 0, 0) + t(1, 0, 1, 0, 1)$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker((A - I)^2) = s(1, 1, 0, 0, 0) + t(-1, 0, 0, 1, 0) + r(1, 0, 1, 0, 1)$

Så vi söker en kedja av längd 2 och en av längd 1. Vi tar $f_2 = (-1, 0, 0, 1, 0) \in \ker((A - I)^2) \setminus \ker(A - I)$ vilket ger $f_1 = (A - I)f_2 = (1, 0, 1, 0, 1)$. Vi fyller ut med $f_3 = (1, 1, 0, 0, 0) \in \ker(A - I)$. Nu är (f_1, f_2, f_3) en bas för $\tilde{E}_1$ där $(A - I)$ avbildar $f_2 \mapsto f_1 \mapsto 0$ och $f_3 \mapsto 0$.

Kedjor för $\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kedjor för $\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker(A - 3I) = t(0, 0, 1, 1, 0)$

Kedjor för $\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker(A - 3I) = t(0, 0, 1, 1, 0)$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kedjor för $\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker(A - 3I) = t(0, 0, 1, 1, 0)$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker((A - 3I)^2) = s(1, 0, 0, 0, 0) + t(0, 0, 1, 1, 0)$

Kedjor för $\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker(A - 3I) = t(0, 0, 1, 1, 0)$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker((A - 3I)^2) = s(1, 0, 0, 0, 0) + t(0, 0, 1, 1, 0)$
Så vi söker en kedja av längd 2. Vi tar $f_5 = (1, 0, 0, 0, 0) \in \ker((A - 3I)^2) \setminus \ker(A - 3I)$ vilket ger $f_4 = (A - 3I)f_5 = (0, 0, 1, 1, 0)$.

Kedjor för $\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker(A - 3I) = t(0, 0, 1, 1, 0)$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $\ker((A - 3I)^2) = s(1, 0, 0, 0, 0) + t(0, 0, 1, 1, 0)$

Så vi söker en kedja av längd 2. Vi tar $f_5 = (1, 0, 0, 0, 0) \in \ker((A - 3I)^2) \setminus \ker(A - 3I)$ vilket ger $f_4 = (A - 3I)f_5 = (0, 0, 1, 1, 0)$.

Nu är $(f_4, f_5,)$ en bas för $\tilde{E}_3$ där $(A - 3I)$ avbildar $f_5 \mapsto f_4 \mapsto 0$.

Kedjor för $\lambda = 3$

Sammantaget har vi nu en Jordanbas $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ där

$$(A - I) : f_2 \mapsto f_1 \mapsto 0, \quad (A - I) : f_3 \mapsto 0, \quad (A - 3I) : f_5 \mapsto f_4 \mapsto 0$$

Kedjor för $\lambda = 3$

Sammantaget har vi nu en Jordanbas $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ där

$$(A - I) : f_2 \mapsto f_1 \mapsto 0, \quad (A - I) : f_3 \mapsto 0, \quad (A - 3I) : f_5 \mapsto f_4 \mapsto 0$$

Vi sätter in basvektorerna som kolonner i en matris S och bildar motsvarande Jordanmatris J:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nu gäller $A = SJS^{-1}$.