TATA53 Föreläsning 7

Linjär algebra överkurs

Jonathan Nilsson

Linköping Universitet

Part I

Inre produktrum

Skalärprodukter

Definition

Ett inre produktrum är ett komplext vektorrum V utrustat med en **inre produkt** (skalärprodukt), en funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ som uppfyller

1. $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$ *(linjäritet i första komponenten)*
2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ *(konjugatsymmetri)*
3. $\langle v, v \rangle \geq 0$ med likhet endast när $v = 0$ *(positivt definit)*

Skalärprodukter

Definition

Ett inre produktrum är ett komplext vektorrum V utrustat med en **inre produkt** (skalärprodukt), en funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ som uppfyller

1. $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$ *(linjäritet i första komponenten)*
2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ *(konjugatsymmetri)*
3. $\langle v, v \rangle \geq 0$ med likhet endast när $v = 0$ *(positivt definit)*

- Ersätter man $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}$ får man definitionen av ett **reellt inre produktrum**.
- I ett inre produktrum definierar vi **normen** eller **längden** av en vektor som $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
- **Avståndet** mellan vektorerna u och v definieras som $\|u - v\|$
- **Vinkeln** mellan vektorerna u och v i ett reellt vektorrum definiras som $\arccos(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|})$

Exempel på skalärprodukter

Vektorrum	**Element**	**Exempel på skalärprodukt**
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum x_i y_i$ (Euklidisk)

Exempel på skalärprodukter

Vektorrum	**Element**	**Exempel på skalärprodukt**
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum x_i y_i$ (Euklidisk)
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y \rangle = x^T D y = \sum d_i x_i y_i$ (Viktad Euklidisk)

Exempel på skalärprodukter

Vektorrum	Element	Exempel på skalärprodukt
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y\rangle = x^T y = \sum x_i y_i$ (Euklidisk)
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y\rangle = x^T Dy = \sum d_i x_i y_i$ (Viktad Euklidisk)
$\mathbb{C}^n$	Komplexa n-tiplar	$\langle x, y\rangle = \sum x_i \overline{y_i}$ (Hermitesk)

Exempel på skalärprodukter

Vektorrum	**Element**	**Exempel på skalärprodukt**
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum x_i y_i$ (Euklidisk)
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y \rangle = x^T Dy = \sum d_i x_i y_i$ (Viktad Euklidisk)
$\mathbb{C}^n$	Komplexa n-tiplar	$\langle x, y \rangle = \sum x_i \overline{y_i}$ (Hermitesk)
$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$	Komplexa matriser	$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$ (Frobenius)

Exempel på skalärprodukter

Vektorrum	Element	Exempel på skalärprodukt	
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y\rangle = x^T y = \sum x_i y_i$	(Euklidisk)
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y\rangle = x^T Dy = \sum d_i x_i y_i$	(Viktad Euklidisk)
$\mathbb{C}^n$	Komplexa n-tiplar	$\langle x, y\rangle = \sum x_i \overline{y_i}$	(Hermitesk)
$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$	Komplexa matriser	$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$	(Frobenius)
$\mathbb{R}[x]$	Polynom	$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$	(Standard L^2)

Exempel på skalärprodukter

Vektorrum	Element	Exempel på skalärprodukt	
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y\rangle = x^T y = \sum x_i y_i$	(Euklidisk)
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y\rangle = x^T Dy = \sum d_i x_i y_i$	(Viktad Euklidisk)
$\mathbb{C}^n$	Komplexa n-tiplar	$\langle x, y\rangle = \sum x_i \overline{y_i}$	(Hermitesk)
$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$	Komplexa matriser	$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$	(Frobenius)
$\mathbb{R}[x]$	Polynom	$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$	(Standard L^2)
$\mathbb{R}[x]$	Polynom	$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0)q^{(k)}(0)$	(Taylor-baserad)

Exempel på skalärprodukter

Vektorrum	Element	Exempel på skalärprodukt
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum x_i y_i$ (Euklidisk)
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y \rangle = x^T D y = \sum d_i x_i y_i$ (Viktad Euklidisk)
$\mathbb{C}^n$	Komplexa n-tiplar	$\langle x, y \rangle = \sum x_i \overline{y_i}$ (Hermitesk)
$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$	Komplexa matriser	$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$ (Frobenius)
$\mathbb{R}[x]$	Polynom	$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$ (Standard L^2)
$\mathbb{R}[x]$	Polynom	$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0)q^{(k)}(0)$ (Taylor-baserad)
$C([a, b])$	Kontinuerliga funktioner på $[a, b]$	$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ (Standard L^2)

Exempel på skalärprodukter

Vektorrum	**Element**	**Exempel på skalärprodukt**	
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y\rangle = x^T y = \sum x_i y_i$	(Euklidisk)
$\mathbb{R}^n$	Reella n-tiplar	$\langle x, y\rangle = x^T Dy = \sum d_i x_i y_i$	(Viktad Euklidisk)
$\mathbb{C}^n$	Komplexa n-tiplar	$\langle x, y\rangle = \sum x_i \overline{y_i}$	(Hermitesk)
$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$	Komplexa matriser	$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$	(Frobenius)
$\mathbb{R}[x]$	Polynom	$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$	(Standard L^2)
$\mathbb{R}[x]$	Polynom	$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0)q^{(k)}(0)$	(Taylor-baserad)
$C([a, b])$	Kontinuerliga funktioner på $[a, b]$	$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$	(Standard L^2)
ℓ^2	Talföljder (a_i) där $\sum \lvert a_i\rvert^2 < \infty$	$\langle a, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$	(Standard ℓ^2)

Vinkelberäkning

Exempel

Låt $\mathbb{R}[x]$ vara vektorrummet av alla polynom med den inre produkten

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Beräkna vinkeln mellan 1 och x.

Skalärproduktsnormen

Sats

Låt V vara ett inre produktrum och låt $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Denna norm uppfyller:

- $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ med likhet när $u||v$ *(Cauchy-Schwarz)*
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ *(absolut-homogenitet)*
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(triangelolikheten)*
- $\|v\| \geq 0$ med likhet endast när $v = 0$ *(positivt definit)*
- $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ *(Parallellogramlagen)*
- $4\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2$ *(norm $\rightarrow$ skalärprodukt)*

Part II

Normer

Normer

Definition

Ett normerat rum är ett reellt eller komplext vektorrum V en **norm**, en funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ som uppfyller

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ *(absolut-homogenitet)*
2. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(triangelolikheten)*
3. $\|v\| \geq 0$ med likhet endast när $v = 0$ *(positivt definit)*

Normer

Definition

Ett normerat rum är ett reellt eller komplext vektorrum V en **norm**, en funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ som uppfyller

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ *(absolut-homogenitet)*
2. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(triangelolikheten)*
3. $\|v\| \geq 0$ med likhet endast när $v = 0$ *(positivt definit)*

- Längder och avstånd kan definieras i ett normerat rum.
- Varje inre produktrum blir ett normerat rum när vi sätter $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
- En norm kommer från en inre produkt om och endast om den uppfyller parallellogramlagen: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

Normer

Definition

Ett normerat rum är ett reellt eller komplext vektorrum V en **norm**, en funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ som uppfyller

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ *(absolut-homogenitet)*
2. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(triangelolikheten)*
3. $\|v\| \geq 0$ med likhet endast när $v = 0$ *(positivt definit)*

- Längder och avstånd kan definieras i ett normerat rum.
- Varje inre produktrum blir ett normerat rum när vi sätter $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
- En norm kommer från en inre produkt om och endast om den uppfyller parallellogramlagen: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

I funktionalanalys studerar man oändligtdimensionella normerade vektorrum som t.ex. **Banach-rum** och **Hilbert-rum**.

Exempel på normer

Vektorrum	**Exempel på norm**
$\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$	$\|x\|_p = \left(\sum \lvert x_i\rvert^p\right)^{1/p}$ (p-normen, $p \geq 1$)

Exempel på normer

Vektorrum	**Exempel på norm**	
$\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$	$\|x\|_p = (\sum \|x_i\|^p)^{1/p}$	(p-normen, $p \geq 1$)
$\mathbb{R}^n$	$\|x\|_\infty = \max \|x_i\|$	(Supremumnorm)

Exempel på normer

Vektorrum	**Exempel på norm**	
$\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$	$\|x\|_p = \left(\sum \|x_i\|^p\right)^{1/p}$	(p-normen, $p \geq 1$)
$\mathbb{R}^n$	$\|x\|_\infty = \max \|x_i\|$	(Supremumnorm)
$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$	$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)} = \sqrt{\sum \|a_{ij}\|^2}$	(Frobeniusnorm)

Exempel på normer

Vektorrum	**Exempel på norm**	
$\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$	$\lVert x\rVert_p = (\sum \lvert x_i\rvert^p)^{1/p}$	(p-normen, $p \geq 1$)
$\mathbb{R}^n$	$\lVert x\rVert_\infty = \max \lvert x_i\rvert$	(Supremumnorm)
$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$	$\lVert A\rVert_F = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)} = \sqrt{\sum \lvert a_{ij}\rvert^2}$	(Frobeniusnorm)
$\{F : V \to V \mid F \text{ linjär}\}$ Där V är ett normerat rum	$\lVert F\rVert_{\mathrm{op}} = \sup\limits_{\lVert v\rVert=1} \lVert F(v)\rVert$	(Operatornorm)

Exempel på normer

Vektorrum	**Exempel på norm**	
$\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$	$\|x\|_p = (\sum \|x_i\|^p)^{1/p}$	(p-normen, $p \geq 1$)
$\mathbb{R}^n$	$\|x\|_\infty = \max \|x_i\|$	(Supremumnorm)
$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$	$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)} = \sqrt{\sum \|a_{ij}\|^2}$	(Frobeniusnorm)
$\{F : V \to V \mid F \text{ linjär}\}$ Där V är ett normerat rum	$\|F\|_{\mathrm{op}} = \sup\limits_{\|v\|=1} \|F(v)\|$	(Operatornorm)
$M_n(\mathbb{C})$	$\|A\|_\sigma = \sqrt{\max \sigma(AA^*)}$	(Spektralnorm)

Exempel på normer

Vektorrum	Exempel på norm
$\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$	$\\|x\\|_p = (\sum \|x_i\|^p)^{1/p}$ (p-normen, $p \geq 1$)
$\mathbb{R}^n$	$\\|x\\|_\infty = \max \|x_i\|$ (Supremumnorm)
$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$	$\\|A\\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)} = \sqrt{\sum \|a_{ij}\|^2}$ (Frobeniusnorm)
$\{F : V \to V \mid F \text{ linjär}\}$ Där V är ett normerat rum	$\\|F\\|_{\mathrm{op}} = \sup\limits_{\\|v\\|=1} \\|F(v)\\|$ (Operatornorm)
$M_n(\mathbb{C})$	$\\|A\\|_\sigma = \sqrt{\max \sigma(AA^*)}$ (Spektralnorm)
$C([a,b])$	$\\|f\\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$ (Supremumnorm)

Exempel på normer

Vektorrum	Exempel på norm	
$\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$	$\|x\|_p = (\sum \|x_i\|^p)^{1/p}$	(p-normen, $p \geq 1$)
$\mathbb{R}^n$	$\|x\|_\infty = \max \|x_i\|$	(Supremumnorm)
$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$	$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)} = \sqrt{\sum \|a_{ij}\|^2}$	(Frobeniusnorm)
$\{F : V \to V \mid F \text{ linjär}\}$ Där V är ett normerat rum	$\|F\|_{\mathrm{op}} = \sup\limits_{\|v\|=1} \|F(v)\|$	(Operatornorm)
$M_n(\mathbb{C})$	$\|A\|_\sigma = \sqrt{\max \sigma(AA^*)}$	(Spektralnorm)
$C([a,b])$	$\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$	(Supremumnorm)
$L^p([a,b])$	$\|f\|_p = \left(\int_a^b \|f(x)\|^p dx\right)^{1/p}$	(L^p-norm)

Exempel på normer

Vektorrum	Exempel på norm	
$\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$	$\\|x\\|_p = (\sum \|x_i\|^p)^{1/p}$	(p-normen, $p \geq 1$)
$\mathbb{R}^n$	$\\|x\\|_\infty = \max \|x_i\|$	(Supremumnorm)
$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$	$\\|A\\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)} = \sqrt{\sum \|a_{ij}\|^2}$	(Frobeniusnorm)
$\{F : V \to V \mid F \text{ linjär}\}$ Där V är ett normerat rum	$\\|F\\|_{\mathrm{op}} = \sup\limits_{\\|v\\|=1} \\|F(v)\\|$	(Operatornorm)
$M_n(\mathbb{C})$	$\\|A\\|_\sigma = \sqrt{\max \sigma(AA^*)}$	(Spektralnorm)
$C([a,b])$	$\\|f\\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$	(Supremumnorm)
$L^p([a,b])$	$\\|f\\|_p = \left(\int_a^b \|f(x)\|^p dx\right)^{1/p}$	(L^p-norm)
ℓ^2	$\\|(a_i)_{i=1}^\infty\\|_2 = \sqrt{\sum \|a_i\|^2}$	(ℓ^2-norm)

p-normen på $\mathbb{R}^2$

På $\mathbb{R}^2$ har vi definierat p-normen för varje $p \geq 1$ som

$$\|(x, y)\|_p := (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

p-normen på $\mathbb{R}^2$

På $\mathbb{R}^2$ har vi definierat p-normen för varje $p \geq 1$ som

$$\|(x, y)\|_p := (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

- Då $p = 2$ får vi den vanliga *Euklidiska normen* $\|(x, y)\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2}$

p-normen på $\mathbb{R}^2$

På $\mathbb{R}^2$ har vi definierat p-normen för varje $p \geq 1$ som

$$\|(x, y)\|_p := (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

- Då $p = 2$ får vi den vanliga *Euklidiska normen* $\|(x, y)\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2}$
- Då $p = 1$ får vi *Manhattan-normen (taxibilsnormen)* $\|(x, y)\|_1 := |x| + |y|$

p-normen på $\mathbb{R}^2$

På $\mathbb{R}^2$ har vi definierat p-normen för varje $p \geq 1$ som

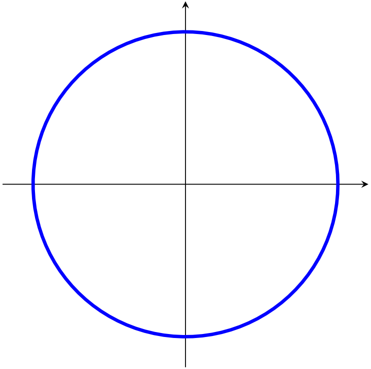
$$\|(x, y)\|_p := (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

- Då $p = 2$ får vi den vanliga *Euklidiska normen* $\|(x, y)\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2}$
- Då $p = 1$ får vi *Manhattan-normen (taxibilsnormen)* $\|(x, y)\|_1 := |x| + |y|$
- Då $p \to \infty$ får vi *Maximum-normen* $\|(x, y)\|_\infty := \max(|x|, |y|)$

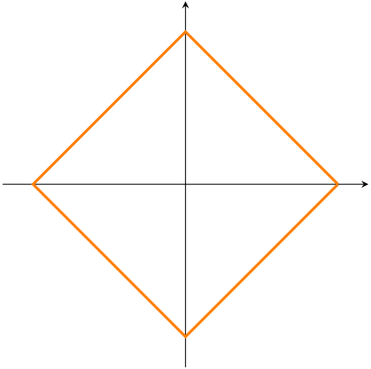
Enhetscirkeln i olika p-normer

Enhetscirkeln $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| = 1\}$ ser olika ut beroende på val av norm.

Euklidiska normen ($p = 2$)



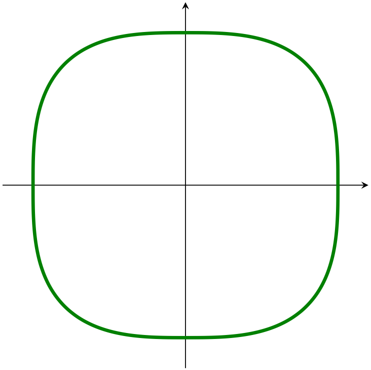
Manhattan-normen ($p = 1$)



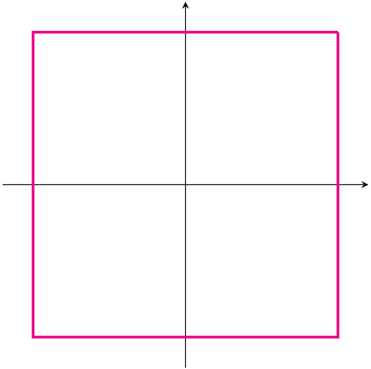
Enhetscirkeln i olika p-normer

Enhetscirkeln $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| = 1\}$ ser olika ut beroende på val av norm.

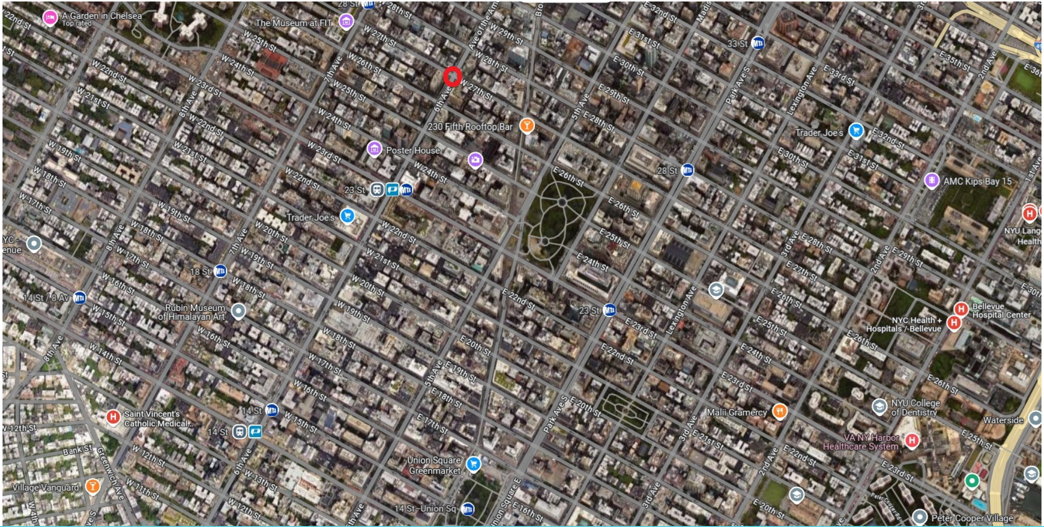
p-normen för $p = 3$



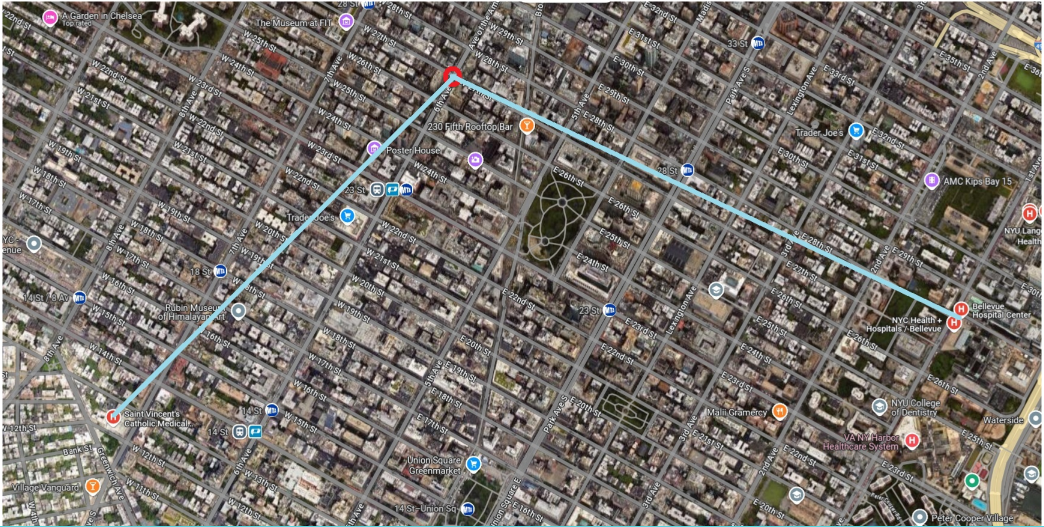
Maximum-normen ($p = \infty$)



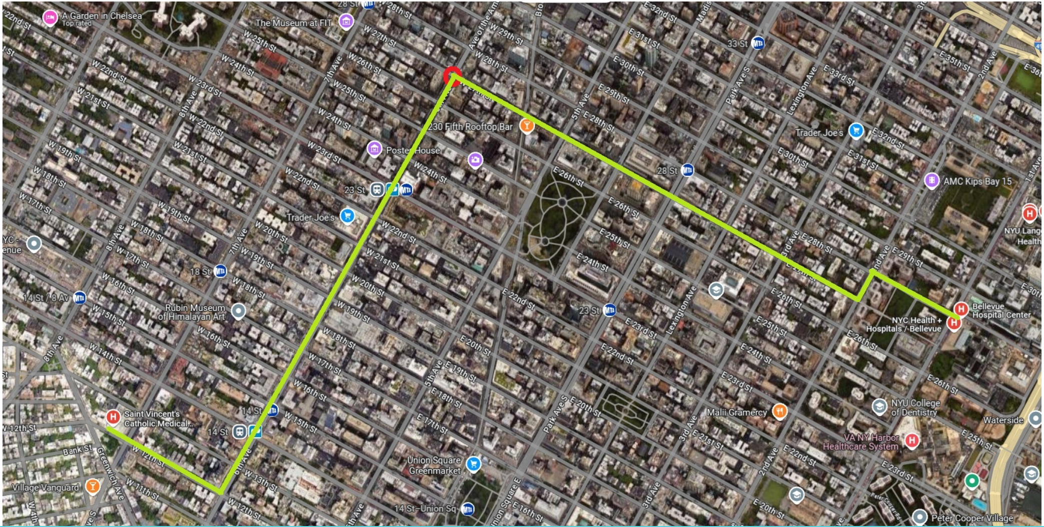
Manhattan-normen



Manhattan-normen

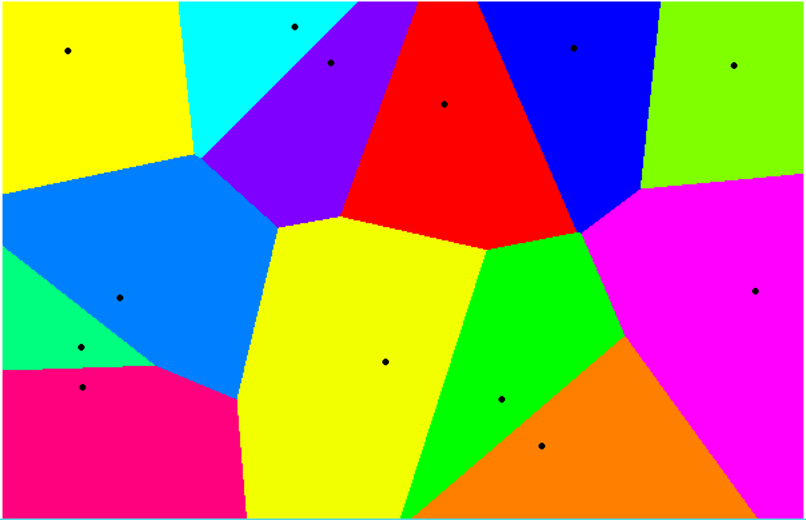


Manhattan-normen



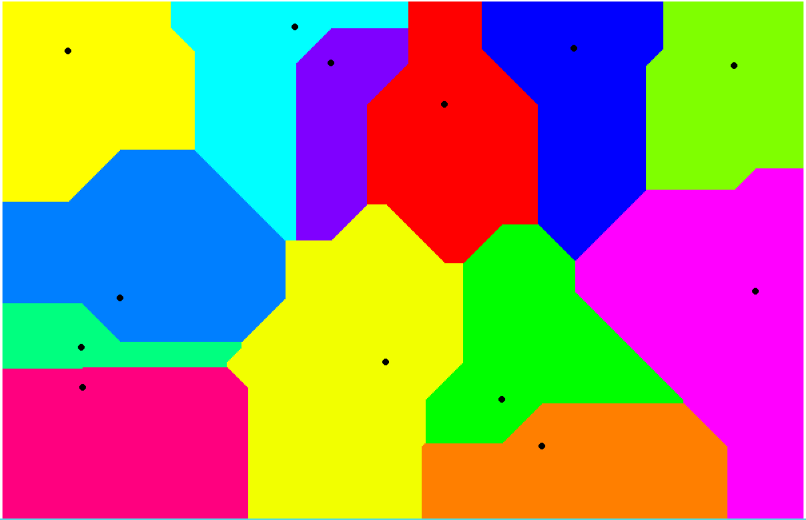
Voronoi-diagram

Varje pixel färgas enligt vilken nod den ligger närmast *i normen* $\|\cdot\|_2$



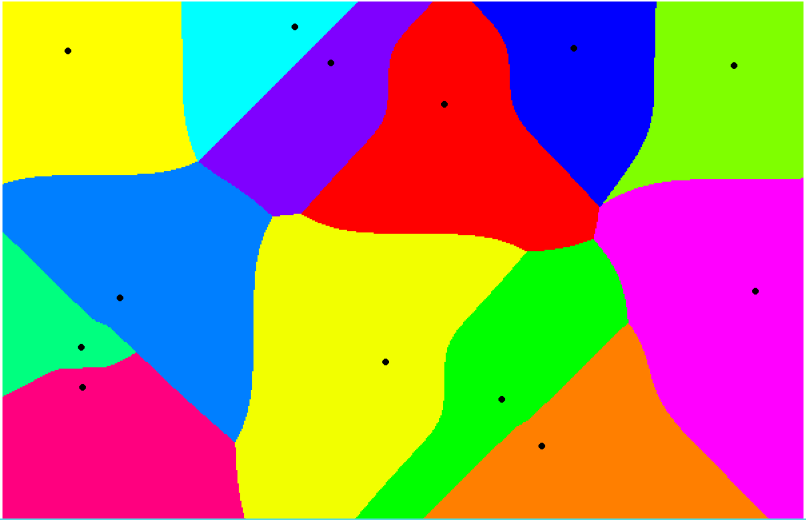
Voronoi-diagram

Varje pixel färgas enligt vilken nod den ligger närmast *i normen* $\|\cdot\|_1$



Voronoi-diagram

Varje pixel färgas enligt vilken nod den ligger närmast *i normen* $\|\cdot\|_5$



Voronoi-diagram

Varje pixel färgas enligt vilken nod den ligger närmast *i normen* $\|\cdot\|_{50}$