TATA53 Föreläsning 8

Linjär algebra överkurs

Jonathan Nilsson

Linköping Universitet

Ortogonal projektion på ett delrum

Definition

Låt V vara ett inre produktrum och låt $U \subset V$ vara ett ändligtdimensionellt delrum. Om $e_1, \ldots, e_n$ är en ortogonal bas för U så ges **ortogonalprojektionen** av en vektor $v \in V$ på U av

$$P_U(v) := P_{e_1}(v) + \cdots + P_{e_n}(v) = \frac{\langle v, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 + \cdots \frac{\langle v, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n.$$

Ortogonal projektion på ett delrum

Definition

Låt V vara ett inre produktrum och låt $U \subset V$ vara ett ändligtdimensionellt delrum. Om $e_1, \dots, e_n$ är en ortogonal bas för U så ges **ortogonalprojektionen** av en vektor $v \in V$ på U av

$$P_U(v) := P_{e_1}(v) + \cdots + P_{e_n}(v) = \frac{\langle v, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 + \cdots \frac{\langle v, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n.$$

Då är $P_U(v)$ den vektorn i U som ligger närmast v, d.v.s $\|P_U(v) - v\|$ är minimalt.

Exempel

Låt V vara rummet av integrerbara 2π-periodiska funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med skalärprodukten*

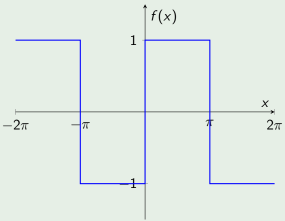
$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Exempel

Låt V vara rummet av integrerbara 2π-periodiska funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med skalärprodukten*

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Låt $\mathcal{F}_n = \mathrm{span}(\sin(x), \ \sin(2x), \ldots, \sin(nx))$, detta är ett delrum av V för varje n.
Låt $f(x) \in V$ vara fyrkantsvågen, den 2π-periodiska funktionen där $f(x) = \mathrm{sgn(x)}$ på $[-\pi, \pi)$:



Hitta den funktion i $\mathcal{F}_n$ som ligger närmast $f(x)$ för varje n.

Beräkning ger att för $a, b \in \mathbb{Z}$ har vi $\langle \sin(ax), \sin(bx) \rangle = \delta_{ij}$ så $\sin(x), \sin(2x), \ldots, \sin(nx)$ är en ON-bas för $\mathcal{F}_n$. Därför ges projektionen av f på $\mathcal{F}_n$ av

$$g_n(x) = P_{\mathcal{F}_n}(f(x)) = \langle f(x), \sin(x) \rangle \sin(x) + \langle f(x), \sin(2x) \rangle \sin(2x) + \cdots + \langle f(x), \sin(nx) \rangle \sin(nx)$$

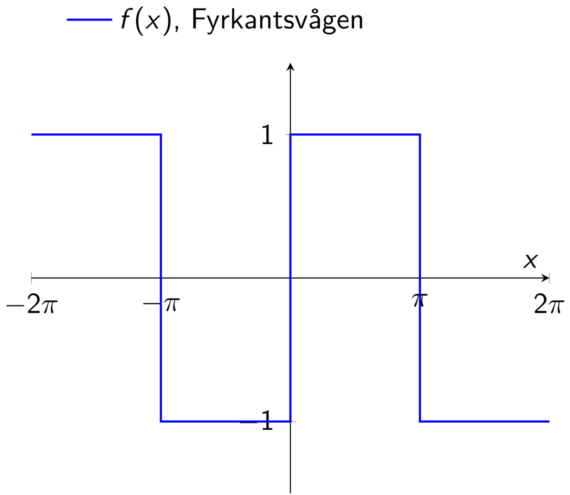
$$= \sum_{k=1}^{n} \langle f(x), \sin(kx) \rangle \sin(kx).$$

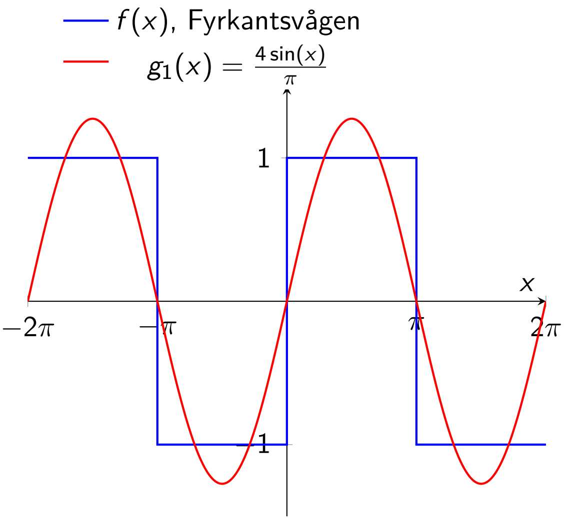
Integralberäkning ger $\langle f(x), \sin(kx) \rangle = 0$ om k är jämnt, och $\langle f(x), \sin(kx) \rangle = \frac{4}{k\pi}$ om k är udda.

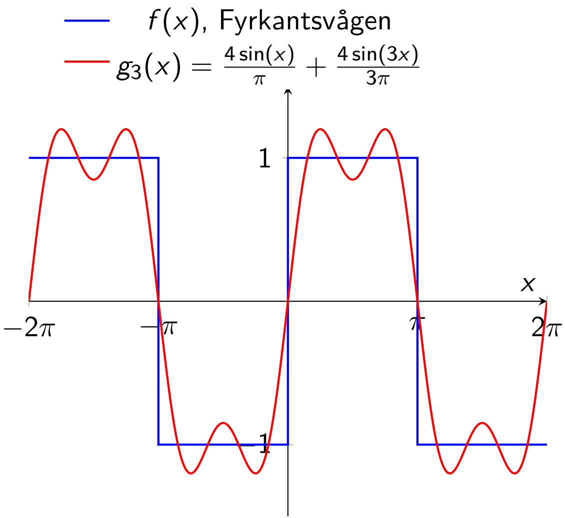
Vi får alltså att projektionen av f på $\mathcal{F}_{2m+1}$ blir

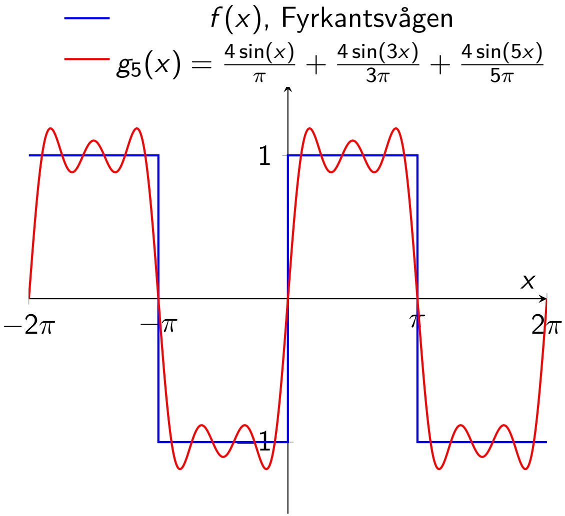
$$g_{2n+1}(x) = P_{\mathcal{F}_{2m+1}} \sum_{k=1}^{m} \frac{4}{k\pi} \sin((2k+1)x)$$

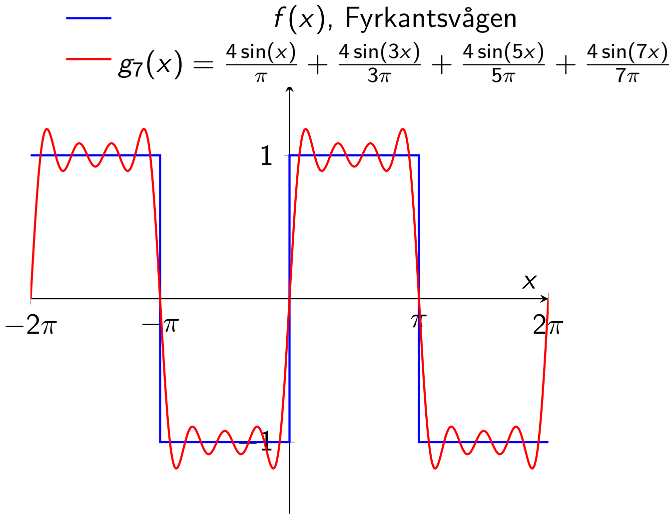
och $g_{2m+2} = g_{2m+1}$.

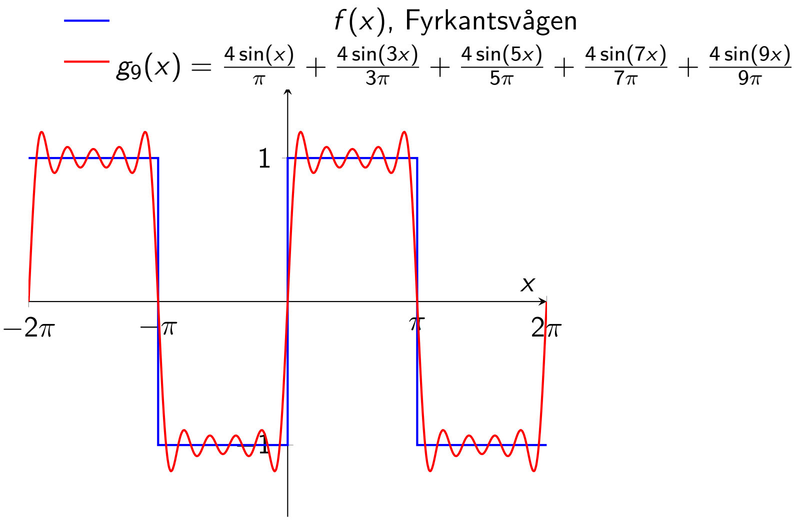

$f(x)$, Fyrkantsvågen
1
x
-2π
$-\pi$
π
2π
-1


$f(x)$, Fyrkantsvågen
$g_1(x) = \frac{4\sin(x)}{\pi}$
1
-1
x
-2π
$-\pi$
π
2π


$f(x)$, Fyrkantsvågen
$g_3(x) = \frac{4\sin(x)}{\pi} + \frac{4\sin(3x)}{3\pi}$
1
x
-2π
$-\pi$
π
2π
-1


$f(x)$, Fyrkantsvågen
$g_5(x) = \frac{4\sin(x)}{\pi} + \frac{4\sin(3x)}{3\pi} + \frac{4\sin(5x)}{5\pi}$
1
-1
x
-2π
$-\pi$
π
2π


$f(x)$, Fyrkantsvågen
$g_7(x) = \frac{4\sin(x)}{\pi} + \frac{4\sin(3x)}{3\pi} + \frac{4\sin(5x)}{5\pi} + \frac{4\sin(7x)}{7\pi}$
x
1
-1
-2π
$-\pi$
π
2π


$f(x)$, Fyrkantsvågen
$g_9(x) = \frac{4\sin(x)}{\pi} + \frac{4\sin(3x)}{3\pi} + \frac{4\sin(5x)}{5\pi} + \frac{4\sin(7x)}{7\pi} + \frac{4\sin(9x)}{9\pi}$
1
x
-2π
$-\pi$
π
2π
-1