

Tillämpningar av tensorer

LÖK

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

Part I

Matrismultiplikation som en tensor

Matrismultiplikation som en (1,2)-tensor

$$V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ har en bas } e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrismultiplikation som en (1,2)-tensor

$$V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ har en bas } e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tensorprodukten $V^* \otimes V^* \otimes V$ är 64-dimensionell med bas $\{e_i^* \otimes e_j^* \otimes e_k \mid 1 \leq i, j, k \leq 4\}$.

Matrismultiplikation som en (1,2)-tensor

$$V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ har en bas } e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tensorprodukten $V^* \otimes V^* \otimes V$ är 64-dimensionell med bas $\{e_i^* \otimes e_j^* \otimes e_k \mid 1 \leq i, j, k \leq 4\}$. Element w i detta vektorrum tar två matriser och ger en matris. Hur ska w väljas för att motsvara matrismultiplikation $w(A, B) = AB$?

$$\begin{aligned} w = & e_1^* \otimes e_1^* \otimes e_1 + e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_2 \\ & + e_2^* \otimes e_3^* \otimes e_1 + e_2^* \otimes e_4^* \otimes e_2 \\ & + e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_3 + e_3^* \otimes e_2^* \otimes e_4 \\ & + e_4^* \otimes e_3^* \otimes e_3 + e_4^* \otimes e_4^* \otimes e_4 \end{aligned}$$

Matrismultiplikation

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

Produkten blir

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{bmatrix}$$

Matrismultiplikation

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

Produkten blir

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{bmatrix}$$

Notera att totalt 8 multiplikationer krävdes.

Strassens algoritm

Låt

$$P_1 = (a_1 + a_4)(b_1 + b_4)$$

$$P_2 = (a_3 + a_4)b_1$$

$$P_3 = a_1(b_2 - b_4)$$

$$P_4 = a_4(b_3 - b_1)$$

$$P_5 = (a_1 + a_2)b_4$$

$$P_6 = (a_3 - a_1)(b_1 + b_2)$$

$$P_7 = (a_2 - a_4)(b_3 + b_4)$$

Då är $AB = C$ där :

$$c_{11} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7$$

$$c_{12} = P_3 + P_5$$

$$c_{21} = P_2 + P_4$$

$$c_{22} = P_1 + P_3 - P_2 + P_6$$

Strassens algoritm

Låt

$$P_1 = (a_1 + a_4)(b_1 + b_4)$$

$$P_2 = (a_3 + a_4)b_1$$

$$P_3 = a_1(b_2 - b_4)$$

$$P_4 = a_4(b_3 - b_1)$$

$$P_5 = (a_1 + a_2)b_4$$

$$P_6 = (a_3 - a_1)(b_1 + b_2)$$

$$P_7 = (a_2 - a_4)(b_3 + b_4)$$

Då är $AB = C$ där :

$$c_{11} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7$$

$$c_{12} = P_3 + P_5$$

$$c_{21} = P_2 + P_4$$

$$c_{22} = P_1 + P_3 - P_2 + P_6$$

Notera att endast 7 multiplikationer krävdes.

Matrismultiplikation som en tensor av rang 7

$$\begin{aligned}w = & (e_1^* + e_4^*) \otimes (e_1^* + e_4^*) \otimes e_1 \\& + (e_3^* + e_4^*) \otimes e_1^* \otimes e_3 \\& + e_1^* \otimes (e_2^* - e_4^*) \otimes e_2 \\& + e_4^* \otimes (e_3^* - e_1^*) \otimes e_1 \\& + (e_1^* + e_2^*) \otimes e_4^* \otimes e_2 \\& + (e_3^* - e_1^*) \otimes (e_1^* + e_2^*) \otimes e_4 \\& + (e_2^* - e_4^*) \otimes (e_3^* + e_4^*) \otimes e_1\end{aligned}$$

Matrismultiplikationsvektorn w är nu skriven som en summa av 7 rena tensorer.

Part II

Algebraiska tal

Definition

Ett komplext tal a kallas **algebraiskt** om det finns ett nollskilt polynom $p(x)$ med heltalskoefficienter så att $p(a) = 0$.

Definition

Ett komplext tal a kallas **algebraiskt** om det finns ett nollskilt polynom $p(x)$ med heltalskoefficienter så att $p(a) = 0$.

- $\frac{5}{7}$ är algebraiskt (tag $p(x) = 7x - 5$)
- $\sqrt{2}$ är algebraiskt (tag $p(x) = x^2 - 2$)
- i är algebraiskt (tag $p(x) = x^2 + 1$)
- $e, \pi, \ln(2)$ är inte algebraiska

Uppgift

Visa att de algebraiska talen bildar en kropp.

Uppgift

Visa att de algebraiska talen bildar en kropp.

Vi behöver visa att om a och b är algebraiska så är också $a + b$ och ab algebraiska.

Uppgift

Visa att de algebraiska talen bildar en kropp.

Vi behöver visa att om a och b är algebraiska så är också $a + b$ och ab algebraiska.

Tag två polynom $p(x)$ och $q(x)$ med heltalskoefficienter där $p(a) = 0$ och $q(b) = 0$. Låt A och B vara heltalsmatriser vars karakteristiska polynom uppfyller $m \cdot p_A = p$ och $n \cdot p_B = q$.

Uppgift

Visa att de algebraiska talen bildar en kropp.

Vi behöver visa att om a och b är algebraiska så är också $a + b$ och ab algebraiska.

Tag två polynom $p(x)$ och $q(x)$ med heltalskoefficienter där $p(a) = 0$ och $q(b) = 0$. Låt A och B vara heltalsmatriser vars karakteristiska polynom uppfyller $m \cdot p_A = p$ och $n \cdot p_B = q$.

Eftersom $p(a) = 0$ är $p_A(a) = 0$ så a är ett egenvärde till A . Låt $Av = av$.

Eftersom $q(b) = 0$ är $p_B(b) = 0$ så b är ett egenvärde till B . Låt $Bw = bw$.

Kronecker-produkter

Vi hade $Av = av$ och $Bw = bw$.

Men då är $(A \otimes B)(v \otimes w) = (Av) \otimes (Bw) = (av) \otimes (bw) = ab(v \otimes w)$ så ab är ett egenvärde till matrisen $A \otimes B$. Så $p_{A \otimes B}(ab) = 0$ och ab är algebraiskt.

Kronecker-produkter

Vi hade $Av = av$ och $Bw = bw$.

Men då är $(A \otimes B)(v \otimes w) = (Av) \otimes (Bw) = (av) \otimes (bw) = ab(v \otimes w)$ så ab är ett egenvärde till matrisen $A \otimes B$. Så $p_{A \otimes B}(ab) = 0$ och ab är algebraiskt.

Låt $C = A \otimes I + I \otimes B$. Då är

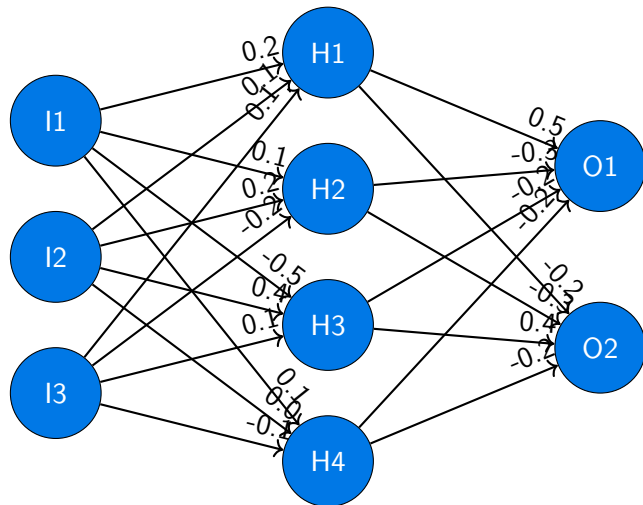
$$C(v \otimes w) = (A \otimes I)(v \otimes w) + (I \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes w + v \otimes Bw = a(v \otimes w) + b(v \otimes w) = (a+b)(v \otimes w).$$

så $a + b$ är ett egenvärde till C . Alltså är $p_C(a + b) = 0$ och $a + b$ är algebraiskt.

Part III

Neurala nätverk

Ett enkelt neuralt nätverk



Input till vänster output till höger, nodvärdena beräknas från vänster till höger som en viktad linjärkombination med grafens vikter. Nodvärdena sätts till noll om de blir negativa.

Input till vänster output till höger, nodvärdena beräknas från vänster till höger som en viktad linjärkombination med grafens vikter. Nodvärdena sätts till noll om de blir negativa.

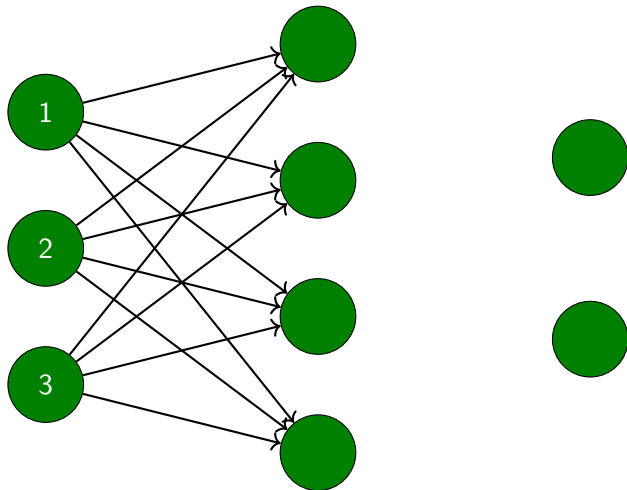
Varje lager i nätverket kan ses som en tensor, i vårt fall får vi två tensorer $v \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^4$ och $w \in \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^2$.

Input till vänster output till höger, nodvärdena beräknas från vänster till höger som en viktad linjärkombination med grafens vikter. Nodvärdena sätts till noll om de blir negativa.

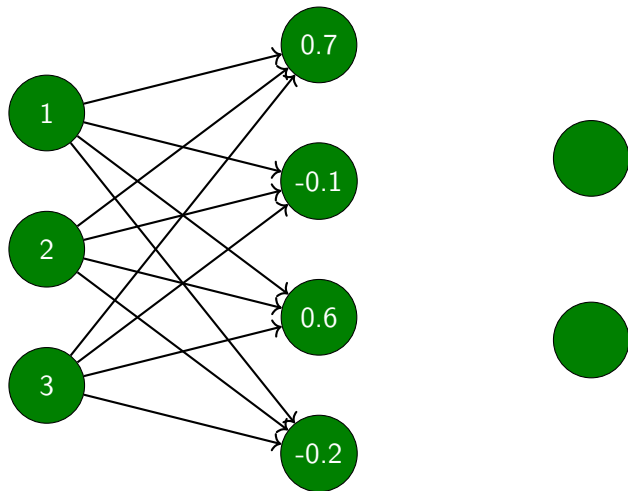
Varje lager i nätverket kan ses som en tensor, i vårt fall får vi två tensorer $v \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^4$ och $w \in \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^2$.

Om vi haft n lager med m noder i varje, kunde hela nätverket representerats av en tensor i $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{n-1}$.

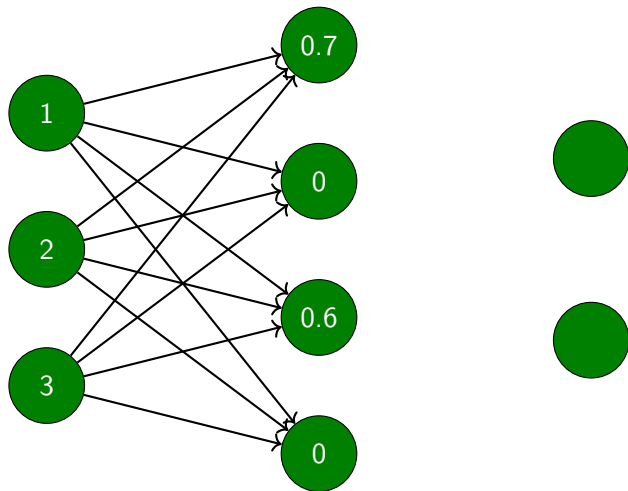
Neuronaktivering för input (1, 2, 3)



Neuronaktivering för input (1, 2, 3)



Neuronaktivering för input (1, 2, 3)



Neuronaktivering för input (1, 2, 3)

