

Talteori 6hp, Kurskod TATA54, Provkod TEN1  
18 Augusti 2022  
LINKÖPINGS UNIVERSITET  
Matematiska Institutionen  
Examinator: Jan Snellman

Alla problem ger maximalt 3 poäng. Full poäng kräver fullständig lösning. 6p räcker för betyg 3, 9p för betyg 4, 12p för betyg 5.

Med  $\mu$  avses Möbiusfunktionen, den multiplikativa funktion som uppfyller  $\mu(1) = 1$ ,  $\mu(p) = -1$  för  $p$  primtal, och  $\mu(n) = 0$  för alla  $n$  som delas av kvadraten av ett heltal. Med  $\lfloor x \rfloor$  avses heltalsdelen, dvs avrundning nedåt till närmsta heltal.

- 1) Definiera  $f(x) = \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$  för alla irrationella  $x$ . Visa att det finns oändligt många irrationella  $0 < x < 1$  så att  $f(f(x)) = f(x)$ .
- 2) Hitta alla kubrotter till  $3 \pmod{7^n}$ , för  $1 \leq n \leq 3$ .
- 3) Visa att  $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$  för alla positiva heltal  $n$ .
- 4) Visa att det finns oändligt många positiva heltal  $n$  så att  $\mu(n-1) + \mu(n) + \mu(n+1) = 0$ . (Ledning: studera kongruensklasser  $\pmod{900}$ .)
- 5) Låt  $n$  vara ett positivt heltal som är en summa av tre kuber. Visa att  $n \not\equiv 4 \pmod{9}$  och att  $n \not\equiv 5 \pmod{9}$ .