Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2020-10-26 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. Bevisa att likheten
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2 \cdot (k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2},$$
gäller för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

2. (a) Bestäm alla positiva heltalslösningar till ekvationen $3003x + 2310y = 300300$. (2p)

   (b) Avgör om likheten $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$ gäller för alla godtyckliga mängder A och B. (1p)

3. (a) På hur många sätt kan man välja ut 5 olika tal bland de första positiva 25 heltalen så att summan av de valda talen blir jämn? (2p)

   (b) Hur många positiva heltalsdelare har 2004^{2003} som är delbara med 2^{2003}? (1p)

4. (a) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z)$ med 3 variabler x, y, z som uppfyller villkoren $f(0,0,0) = 0$, $f(0,0,1) \neq f(0,1,0)$ och $f(1,0,0) \leq f(1,1,1)$ finns det? (2p)

   (b) Hur många permutationer av bokstäverna i ordet FYRFÄRGSTEOREMET innehåller ordet FEST men inget av orden STYRE eller FESTFÄRG? (1p)

5. Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\mathbf{Z}$ definieras genom att sätta $x \,\mathcal{R}\, y$ om och endast om $5|(x + 4y)$. Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation och ange den partition av $\mathbf{Z}$ som $\mathcal{R}$ ger upphov till. (3p)

6. Låt $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 5, 8\}$ och definiera en relation $\mathcal{R}_2$ på $A \times B$ genom att sätta $(x, y)\, \mathcal{R}_2\, (z, w)$ om och endast om $(x + y)|(z + w)$. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en partialordning och rita Hassediagrammet för po-mängden $(A \times B, \mathcal{R}_2)$. Sortera slutligen po-mängden topologiskt. (3p)

7. Är det sant att två grafer måste vara isomorfa om

   (a) båda har sex hörn som alla har gradtal 2? (1p)

   (b) båda har sju hörn som alla har gradtal 6? (1p)

   (c) båda är 3-reguljära och har sex hörn? (1p)