Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2021-01-04 kl. 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. Visa att $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n$, för alla heltal $n \geq 2$. (3p)

2. Ange samtliga lösningar till de diofantiska ekvationerna

   (a) $931x + 896y = 420$, (b) $931x - 896y = 420$. (3p)

3. Betrakta ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$.

   (a) Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen som uppfyller att $0 < x_1 < 11$, $x_i = x_{i+1}$ för $i \in \{2, 3\}$, och $x_j > 0$ för $j \in \{2, 3, 4\}$. (1p)

   (b) Hur många heltalslösningar som uppfyller att $-1 \leq x_i < 14$, $i = 1, 2, 3, 4$, finns det? (2p)

4. (a) Skriv den booleska funktionen $f(x, y, z) = \overline{xy} + \overline{y}z$ på fullständig disjunktiv normalform. (2p)

   (b) Visa att $5|(2^{3n} - 3^n)$ för alla heltal $n \geq 1$. (1p)

5. Låt A vara mängden av alla positiva heltal j sådana att $10000000 \leq j \leq 80000000$. Låt $B \subseteq A$ vara en delmängd till A som består av alla tal som innehåller följden 1234 och låt C vara en delmängd till A som består av alla tal som innehåller följden 3456. Definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på mängden $A \times (B \cup C)$ genom att sätta $(x, y)\ \mathcal{R}_1\ (u, v)$ om

   - x och u båda tillhör mängden $B \cup C$, eller
   - x och u båda inte tillhör mängden $B \cup C$.

   Visa att $\mathcal{R}_1$ är en ekvivalensrelation, bestäm den partition som $\mathcal{R}_1$ ger upphov till, samt bestäm antalet element i varje ekvivalensklass. (3p)

6. Låt D vara mängden av alla positiva delare till talet 132. Definiera en relation $\mathcal{R}_2$ på D genom att sätta $x\ \mathcal{R}_2\ y$ om $x|y$. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en partialordning på D, rita Hassediagrammet för po-mängden $(D, \mathcal{R}_2)$ samt avgör om $(D, \mathcal{R}_2)$ är ett lattice. (3p)

7. Låt G vara grafen som fås från en cykel C_5 av längd 5 genom att lägga till en kant mellan två hörn som inte är grannar i C_5. Bestäm kromatiska polynomet för G samt bestäm minsta antalet kanter som måste tas bort från G för att få en bipartit graf. (3p)