Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2021-08-28 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. Finns det något tal a så att likheten

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2 - 2k) = a(2n^3 - 2n)$$

gäller för alla heltal $n \geq 1$? Bevisa i så fall ditt påstående. (3p)

2. (a) Avgör om sista siffran i talen 33^{327} och 327^{33} är lika. (1p)

   (b) John och Paul säljer hembakta bullar och rulltårtor för 21 respektive 37 kr. Hur många av varje sort kan de ha sålt om de säljer för totalt 954 kr? (2p)

3. På hur många sätt kan man fördela 30 bollar på 5 olika lådor om

   (a) bollarna är identiska och låda 1 och 3 båda ska innehålla minst 4 bollar. (1p)

   (b) bollarna är identiska, alla lådor ska innehålla minst en boll och låda 1 och 2 ska innehålla högst 5 bollar? (1p)

   (c) bollarna är olika och alla bollar ligger ej i samma låda? (1p)

4. (a) Hur många olika icke-isomorfa träd med fem hörn finns det? (1p)

   (b) Visa att

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{n-1},$$

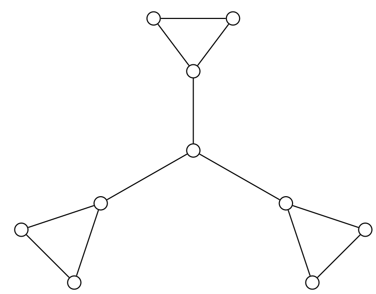
för varje jämnt heltal $n \geq 2$. (Ledning: Använd binomialsatsen.) (2p)

5. Från bokstäverna i ordet SOMMARKÄNSLA kan olika ”ord” (d.v.s. följder av bokstäver) bildas genom att välja ut ett godtyckligt antal av dessa bokstäver och sätta samman dem till en följd. Låt A vara mängden av alla ord som kan bildas på detta sätt. Definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på A genom att sätta $x\,\mathcal{R}_1\,y$ om x och y innehåller precis samma bokstäver, men inte nödvändigtvis lika många av varje sort. (Således gäller t.ex. att SOA och SOAA står i relation till varandra under $\mathcal{R}_1$, medan SOA och SOM inte gör det.) Visa att $\mathcal{R}_1$ är en ekvivalensrelation och bestäm antalet olika ekvivalensklasser, samt antalet element i ekvivalensklassen [SOMMARKÄNSLA]. (3p)

Var god vänd!

6. Låt X vara mängden av alla positiva delare till talet 24. En relation $\preceq$ på X ges av att sätta $x \preceq y$ om $x|y$. Visa att $\preceq$ är en partialordning på X, rita hassediagrammet för po-mängden $(X, \preceq)$, samt sortera po-mängden $(X, \preceq)$ topologiskt. (3p)

7. Bestäm ett uttryck för det kromatiska polynomet för nedanstående graf G. Bestäm även hur många kanter som komplementet till G innehåller. (3p)



Lycka till!