Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2021-10-26 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. Visa att
$$4 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + \cdots + (3n-2)(2n-2) = 2n^3 - 2n^2$$
för alla heltal $n \geq 2$. (3p)

2. (a) Avgör om det finns en multiplikativ invers till $14 \mod 8$. (1p)

   (b) Ange samtliga heltalslösningar till $87x + 105y = 6000$. (2p)

3. (a) Låt B vara mängden som innehåller alla "ord" (d.v.s. följder av bokstäver) som kan bildas med fem av bokstäverna i ordet BARRSKOGSBÄR (så t.ex. ordet KÄRRA tillhör mängden B). Bestäm $|B|$. (2p)

   (b) Bestäm för vilka värden på a och b som den kompletta bipartita grafen $K_{a,b}$ innehåller en Hamiltoncykel. (1p)

4. (a) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z)$ med 3 variabler uppfyller att $f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) \neq f(0, 1, 0)$? (1p)

   (b) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z, w)$ med 4 variabler uppfyller att $f(0, 0, 0, 1) + f(0, 0, 1, 0) = f(0, 0, 1, 1)$ (boolesk addition)? (2p)

5. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ som definieras genom att sätta $(u, v) \mathcal{R} (x, z)$ om $u + x$ är ett jämnt heltal. Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation samt bestäm alla skilda ekvivalensklasser. (3p)

6. Låt G vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ och där två hörn i och j är grannar om

   - $1 \leq i \leq 4$ och $1 \leq j \leq 4$,
   - $5 \leq i \leq 8$ och $5 \leq j \leq 8$, eller
   - $9 \leq i \leq 12$ och $9 \leq j \leq 12$;

   G innehåller dessutom kanter mellan hörnen 4 och 5, 5 och 9, samt 4 och 9. Avgör om G är planär. Bestäm även kromatiska polynomet för G. (3p)

7. Låt $E = \{21, 22, \ldots, 40\}$ och definiera relationen $\mathcal{R}_2$ på E genom att för $x, y \in E$ sätta $x \mathcal{R}_2 y$ om $x - y$ är ett icke-negativt heltal som är delbart med 3. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en partialordning och rita dess Hassediagram. (3p)

Lycka till!