Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2022-08-27 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. (a) Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen $97x + 27y = 17$. (2p)

   (b) Beräkna 5^{327} mod 17. (1p)

2. Visa att $7 + 11 + 15 + \cdots + (4n + 3) = 2n^2 + 5n$, för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

3. (a) Från en grupp av 12 flickor och 11 pojkar skall 2 olika lag bildas. Hur många olika möjligheter att bilda de 2 olika lagen finns om varje lag skall bestå av 6 personer, och åtminstone en pojke skall finnas med i varje lag? (2p)

   (b) Visa att bland 12 heltal finns minst 2 stycken x, y sådana att $x - y$ är en multipel av 11. (1p)

4. Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 46$ om

   (a) $1 \leq x_1 \leq 10$, $x_2 \geq 21$, $x_3 \geq -12$, $x_4 \geq 0$. (1p)

   (b) $4 \leq x_i \leq 14$, $i = 1, 2, 3, 4$. (2p)

5. Låt A vara mängden av alla olika booleska funktioner $f(x, y)$ med 2 variabler x, y. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på A som definieras av att $f\mathcal{R}g$ om $f(x, 1) = g(x, 1)$, d.v.s. $f(x, y) = g(x, y)$ om $y = 1$. Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation? Bestäm i så fall den partition av A som $\mathcal{R}$ ger upphov till. (3p)

6. Låt $B = \{6, 7, 8, 9\} \times \{10, 11\}$ och definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på mängden B genom att sätta $(x_1, x_2)\mathcal{R}_1(y_1, y_2)$ om $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

   (a) Undersök om relationen $\mathcal{R}_1$ är en partialordning. (2p)

   (b) Om $\mathcal{R}_1$ är en partialordning, bestäm om po-mängden $(B, \mathcal{R}_1)$ i så fall har några största och/eller minsta element. Om $\mathcal{R}_1$ inte är en partialordning, definiera en relation på B som är en partialordning. (1p)

7. Betrakta en cykel C_6 med hörnmängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Låt G vara komplementet till C_6. Från G bildar vi en viktad graf genom att tilldela varje kant ij vikten $2(i + j)$. Bestäm ett minimalt uppspännande träd i denna viktade graf. Avgör även om G innehåller en Hamiltoncykel. (3p)

Lycka till!