

Tentamen i Diskret Matematik

2023-01-03 kl. 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

- (a) Hans och Greta plockar lingon och kantareller i skogen för att sälja i sin butik. De säljer lingon för 50 kr/kg och kantareller för 65 kr/kg. En dag har de sålt för 13000 kr. Hur många kg lingon respektive kantareller kan det ha sålt under dagen? (2p)
 - (b) Bestäm koefficienten framför x^6 i utveckling av $(2x^2 - \frac{3}{x})^{12}$. (1p)
2. Visa att för alla heltal $n \geq 2$ gäller

$$\sum_{k=1}^n (9k^2 - 9k) = 3n^3 - 3n. \quad (3p)$$

- (a) Liam skall laga fruktsallad och har köpt 22 olika sorters frukt. Hans gäster kräver att antalet frukter som används i salladen skall vara ett primtal $p \geq 3$. På hur många sätt kan Liam välja ingredienserna till sin fruktsallad? (1p)
 - (b) Liams bror Noel har köpt 12 olika glasspinnar. På hur många sätt kan han lägga sina 12 olika glasspinnar i 5 olika lådor? (1p)
 - (c) När Noel dukar tar han 5 identiska skålar. På hur många olika sätt kan 5 identiska skålar och 6 olika glasspinnar ordnas i en följd om två glasspinnar inte får placeras bredvid varandra. (1p)
 4. (a) Låt $\hat{K}_{3,6}$ vara grafen som fås från den kompletta bipartita grafen $K_{3,6}$ genom att underdela exakt en kant. Vad är kromatiska talet för $\hat{K}_{3,6}$? (1p)
 - (b) Låt \mathcal{R} vara en relation på $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ som ges av $\mathcal{R} = \{(1, 2), (3, 4), (2, 3)\}$. Vad är det minsta antalet ordnade par som måste läggas till \mathcal{R} för att få en transitiv relation? (1p)
 - (c) Är det sant att $A \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = A \cup B \cup \bar{C}$ för alla mängder A, B, C ? (1p)
5. Låt $X = \{7, 8, 9, \dots, 19\}$.
 - (a) Visa att delbarhetsrelationen på X är en partialordning och rita hassediagrammet för po-mängden $(X, |)$. (2p)
 - (b) Vilka maximala och minimala element har po-mängden $(X, |)$? (1p)
 6. Låt J vara mängden av alla heltal som är delbara med 5. Definiera en relation \mathcal{R}_1 på J genom att sätta $x \mathcal{R}_1 y$ om $10|(x + y)$. Visa att \mathcal{R}_1 är en ekvivalensrelation på J och bestäm alla ekvivalensklasser som J ger upphov till. (3p)

Var god vänd!

7. Låt K_7 vara en komplett graf med hörnmängd $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(a) Avgör hur många olika stigar av längd 3 som K_7 innehåller. (1p)

(b) Från K_7 bildar vi en viktad graf genom att för varje kant ij , där $i < j$, tilldela kanten vikten $\frac{i+j}{\text{sgd}(i,j)}$. Bestäm ett minimalt uppspannande träd i den viktade grafen. (2p)

Lycka till!