Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2023-08-26 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. (a) Ange samtliga positiva heltalslösningar (x, y) till ekvationen $377x + 416y = 3250$ (2p)

   (b) Beräkna koefficienten framför a^9b^{18} i uttrycket $(a^3 + 2b^2)^{12} - (2a - 3b^6)^{12}$. (1p)

2. Visa att för alla heltal $n \geq 1$ gäller

$$2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \quad + n(3n-1) = n^2(n+1).$$

   (3p)

3. (a) Låt $f(x, y, z) = x \cdot \overline{y \cdot z} + \overline{\overline{x \cdot z} + \overline{y} \cdot \overline{z}}$ vara en boolesk funktion av tre variabler. Skriv f på fullständig konjunktiv normalform (2p)

   (b) Hur många delgrafer som är slutna Eulervägar har den kompletta bipartita grafen $K_{2,4}$? (1p)

4. (a) Hur många heltal mellan 500 och 2000 är delbara med precis ett av talen 2, 3 och 5? (2p)

   (b) Hur många positiva heltalslösningar till ekvationen $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 27$ uppfyller att $x_1, x_2, x_3 \geq 3$? (1p)

5. Från bokstäverna i ordet KÖRSBÄRSTRÄD kan olika ”ord” (d.v.s. följder av bokstäver) bildas genom att välja ut ett godtyckligt antal av dessa bokstäver och sätta samman dem till en följd. Låt A vara mängden av alla ord som kan bildas på detta sätt. Definiera en relation $\mathcal{R}$ på A genom att låta $x\mathcal{R}y$ om x och y innehåller lika många bokstäver. (Således gäller t.ex. att RÖD och BÄR står i relation till varandra under $\mathcal{R}$, medan RÖD och RÖ inte gör det.) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation, bestäm antalet ekvivalensklasser samt antalet element i ekvivalensklassen [BRÖD]. (3p)

6. Låt B vara mängden av alla olika följder av längd högst 8 som består av fyror och nior, och där alla fyror kommer före alla nior. (Till exempel gäller att $44999 \in B$, $44 \in B$ och $9999 \in B$, medan $44994 \notin B$.) En relation $\mathcal{R}_2$ på B definieras genom att sätta $x \, \mathcal{R}_2 \, y$ om antingen

   - följden y innehåller fler fyror än x, eller
   - x och y innehåller lika många fyror och y innehåller minst lika många element som x.

   Avgör om $\mathcal{R}_2$ en partialordning. Är $\mathcal{R}_2$ en totalordning? (3p)

Var god vänd!

7. Låt K_5 vara den kompletta grafen med 5 hörn. Hur många olika icke-isomorfa uppspännande träd innehåller K_5? Bestäm även det kromatiska polynomet för grafen som erhålls från K_5 genom att underdela precis en kant i K_5. (3p)

Lycka till!