Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2023-10-24 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. (a) Ange samtliga heltalslösningar (x, y) till ekvationen $798x + 768y = 66$ (2p)

   (b) Ange entalssiffran i talet $3^{14} + 4^{15}$. (1p)

2. Visa att $a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, för alla heltal $n \geq 1$ och $a, q \in \mathbf{R}$, där $q \neq 1$. (3p)

3. (a) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z)$ med 3 variabler x, y, z finns det som uppfyller villkoret att $f(0, 0, 1) + f(0, 0, 0) + f(1, 1, 1) \leq f(1, 0, 1)$? (Vi adderar förstås booleskt.) (2p)

   (b) Låt $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$ vara en relation på $\{1, 2, 3\}$. Rita relationsgrafen för $\mathcal{R}$ och avgör om $\mathcal{R}$ är transitiv. (1p)

4. (a) Lisa har 18 olika böcker, 3 på spanska och resterande 15 på 15 andra olika språk. Hon vill ställa böckerna på två hyllor i sin bokhylla, så att på den översta hyllan är varannan bok på spanska och varannan bok på något annat språk. På hur många olika sätt kan hon ordna böckerna i sina två hyllor? (2p)

   (b) Lisa vill efter denna ansträngning äta mellanmål. Hjälp henne att bestämma hur många mellanmål hon kan bilda genom att välja ut 2 frukter bland 5 olika, en sorts kaffe bland 4 olika sorter, samt 5 sorters kakor bland 9 olika sorter. (1p)

5. Definiera en relation $\mathcal{R}_2$ på de naturliga talen $\mathbf{N}$ genom att sätta $x \,\mathcal{R}_2\, y$ om $x^2 - y^2 \equiv 0 \mod 5$. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en ekvivalensrelation och bestäm den partition av $\mathbf{N}$ som $\mathcal{R}_2$ ger upphov till. (3p)

6. Låt $A = \{x \in \mathbf{N} : x = 10k, k \in \mathbf{N}\}$ och $B = \{x \in \mathbf{N} : 0 \leq x \leq 9\}$. Betrakta mängden $A \times B$, och definiera en relation $\mathcal{R}_3$ på $A \times B$ genom att sätta $(a, b) \,\mathcal{R}_3\, (c, d)$ om $a + b \leq c + d$. Visa att $\mathcal{R}_3$ är en partialordning och avgör om po-mängden $(A \times B, \mathcal{R}_3)$ har något/några största eller minsta element. (3p)

7. Låt $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och låt $\mathcal{B}$ vara mängden av alla delmängder till B med kardinalitet 2. Definiera en graf G med hörnmängd $\mathcal{B}$ där två hörn $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ är grannar om och endast om $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Avgör hur lång den kortaste cykeln i G är och bestäm även $\chi(G)$. (3p)

Lycka till!