Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2024-01-02 kl. 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. (a) Ange samtliga positiva heltalslösningar (x, y) till ekvationen $462x + 54y = 6000$. (2p)

   (b) Är alla grafer med hörnmängd $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, som innehåller precis två cykler av längd 3, isomorfa? (1p)

2. Visa att
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{n}{4n+1}$$
   för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

3. Nelly har 3 blåa kulor, 5 gröna kulor, 2 röda kulor och 11 gula kulor i sin kulpåse. (Kulor av samma färg betraktas som identiska.) Hon drar slumpmässigt 10 kulor från kulpåsen.

   (a) På hur många sätt kan hon ordna dessa 10 kulor i en rad från vänster till höger om hon inte drog några gula kulor alls? (1p)

   (b) Vad blir svaret i (a) om hon istället drog 5 gula, 3 blå och 2 gröna, och 2 st gula kulor inte får vara placerade bredvid varandra? (1p)

   (c) Vad blir svaret i (b) om kulorna som ligger längst till vänster och längst till höger måste ha olika färg? (1p)

4. Ange antalet heltalslösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 50$, då

   (a) $x_i \geq 1$, för $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. (1p)

   (b) $x_i \geq 0$, för $i = 1, 2, 3, 4, 5$ och $0 \leq x_6 < 48$. (1p)

   (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, och $x_i \geq 0$, för $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. (1p)

5. Låt X vara mängden av alla positiva delare till 4500. Definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på X genom att sätta $x \mathcal{R}_1 y$ om x och y har lika många primtalsfaktorer. (T.ex. gäller att $4 \mathcal{R}_1 6$ och $2 \mathcal{R}_1 3$, men $2 \not\mathcal{R}_1 4$.) Visa att $\mathcal{R}_1$ är en ekvivalensrelation och ange alla skilda ekvivalensklasser och antalet element i varje sådan klass. (3p)

6. Låt $A = \{1, 2\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ och definiera en graf G med hörnmängd A genom att låta hörnen (x, y) och (w, z) vara grannar om $x \neq w$, eller om $x = w$ och $y + z \leq 5$. Avgör hur lång den längsta cykeln i G är och bestäm även kromatiska polynomet för G. (3p)

7. Låt $\mathcal{F}_2$ vara mängden av alla booleska funktioner med 2 variabler. Definiera en relation $\mathcal{R}_2$ på $\mathcal{F}_2$ genom att sätta $f(x, y) \mathcal{R}_2 g(x, y)$ om $f(x, y) \leq g(x, y)$ gäller för alla olika värden på x och y. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en partialordning och rita Hassediagrammet för $(F_2, \mathcal{R}_2)$. (3p)

Lycka till!