Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2020-10-26 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. Bevisa att likheten
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2 \cdot (k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2},$$
gäller för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

2. (a) Bestäm alla positiva heltalslösningar till ekvationen $3003x + 2310y = 300300$. (2p)

   (b) Avgör om likheten $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$ gäller för alla godtyckliga mängder A och B. (1p)

3. (a) På hur många sätt kan man välja ut 5 olika tal bland de första positiva 25 heltalen så att summan av de valda talen blir jämn? (2p)

   (b) Hur många positiva heltalsdelare har 2004^{2003} som är delbara med 2^{2003}? (1p)

4. (a) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z)$ med 3 variabler x, y, z som uppfyller villkoren $f(0, 0, 0) = 0$, $f(0, 0, 1) \neq f(0, 1, 0)$ och $f(1, 0, 0) \leq f(1, 1, 1)$ finns det? (2p)

   (b) Hur många permutationer av bokstäverna i ordet FYRFÄRGSTEOREMET innehåller ordet FEST men inget av orden STYRE eller FESTFÄRG? (1p)

5. Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\mathbf{Z}$ definieras genom att sätta $x \mathcal{R} y$ om och endast om $5|(x + 4y)$. Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation och ange den partition av $\mathbf{Z}$ som $\mathcal{R}$ ger upphov till. (3p)

6. Låt $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 5, 8\}$ och definiera en relation $\mathcal{R}_2$ på $A \times B$ genom att sätta $(x, y) \mathcal{R}_2 (z, w)$ om och endast om $(x + y)|(z + w)$. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en partialordning och rita Hassediagrammet för po-mängden $(A \times B, \mathcal{R}_2)$. Sortera slutligen po-mängden topologiskt. (3p)

7. Är det sant att två grafer måste vara isomorfa om

   (a) båda har sex hörn som alla har gradtal 2? (1p)

   (b) båda har sju hörn som alla har gradtal 6? (1p)

   (c) båda är 3-reguljära och har sex hörn? (1p)

Lösningsskisser för tentamen 2020-10-26

1. Använd induktion över n.
2. (a) Eftersom $\text{sgd}(3003, 2310) = 231$ kan ekvationen skrivas $13x + 10y = 1300$. Euklides algoritm ger sedan att $1 = 10 \cdot 4 - 3 \cdot 13$ och alltså att $1300 = 10 \cdot 5200 - 13 \cdot 3900$. En lösning är således $x = -3900$ och $y = 5200$. Alla lösningar ges följaktligen av $x = -3900 + 10n$ och $y = 5200 - 13n$, där n är ett godtyckligt heltal. Villkoret att $x, y \geq 0$ ger sedan att $391 \leq n \leq 399$.

   (b) Venndiagram ger att likheten stämmer.
3. (a) Eftersom summan ska vara jämn, så kan man välja ut $0, 2$ eller 4 udda tal mellan 1 och 25. Antalet sätt att välja talen är alltså $\binom{12}{5} + \binom{13}{2}\binom{12}{3} + \binom{13}{4}\binom{12}{1}$.

   (b) Eftersom $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, så fås att att antalet positiva delare som är delbara med 2^{2003} är 2004^3.
4. (a) Vi delar upp problemet i 2 olika fall och räknar antalet sådana funktioner som uppfyller $f(1,0,0) < f(1,1,1)$ och antalet funktioner som uppfyller $f, 1, 0, 0) = f(1,1,1)$. I första fallet finns 2^4 sådan funktioner och i andra fallet finns 2^5 sådana funktioner. Alltså blir totala antalet sådan funktioner $2^4 + 2^5 = 3 \cdot 2^4$.

   (b) Vi betraktar ordet FEST som en bokstav. Då finns totalt 13 bokstäver i ordet FYRFÄRGSTEOREMET, och bland dessa 3 st R och 2 st E. Sålunda finns $\frac{13!}{3!2!}$ permutationer av bokstäverna i ordet FYRFÄRGSTEOREMET som innehåller följden FEST. På samma sätt fås att antalet permutationer som innehåller FEST och STYRE är $\frac{10!}{2!}$, antalet permutationer som innehåller FEST och FESTFÄRG är $\frac{9!}{2!2!}$, och antalet permutationer som innehåller alla tre orden FEST, STYRE och FESTFÄRG är 0. Sökt antalet permutationer är alltså $\frac{13!}{3!2!} - \frac{10!}{2!} - \frac{9!}{2!2!}$.
5. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation.

   Villkoret $5|(x + 4y)$ är ekvivalent med att $x + 4y \equiv 0 \mod 5$, vilket är samma sak som att $x \equiv y \mod 5$. Alltså gäller att $x \mathcal{R} y$ om x och y har samma rest vid division med 5. Ekvivalensklasserna blir alltså

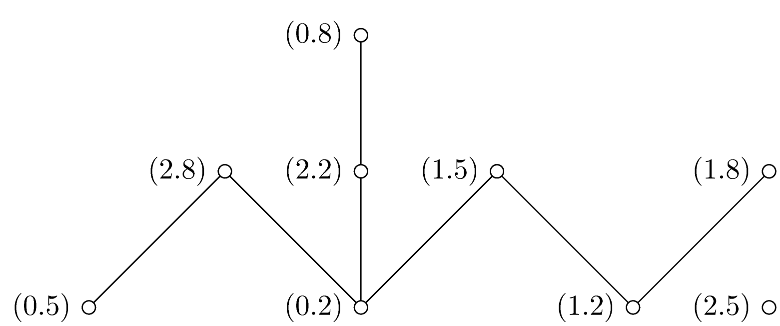
   $[0] = \{0, 5, -5, 10, -10, \dots\}$,

   $[1] = \{1, 6, -4, 11, -9, \dots\}$,

   $[2] = \{2, 7, -3, 12, -8, \dots\}$,

   $[3] = \{3, 8, -2, 13, -7, \dots\}$,

   $[4] = \{4, 9, -1, 14, -6, \dots\}$.
6. Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och alltså en partialordning. Hassediagrammet ser ut på följande sätt:



En topologisk sortering av po-mängden är

$$(0,5),(0,2),(2,8),(2,2),(0,8),(1,2),(1,5),(2,5),(1,8),$$

där man ordnar elementen enligt denna lista.

7. (a) Falskt. Två icke-isomorfa grafer är en cykel av längd 6 och en graf som består av två st cykler av längd 3.

   (b) Sant. En sådan graf är isomorf med K_7.

   (c) Falskt. Den kompletta bipartita grafen $K_{3,3}$ är inte isomorf med en graf som består av två disjunkta trianglar, där varje hörn i den första triangeln är granne med precis ett hörn i den andra triangeln, och vice versa.