Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2021-01-04 kl. 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. Visa att $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n$, för alla heltal $n \geq 2$. (3p)

2. Ange samtliga lösningar till de diofantiska ekvationerna

   (a) $931x + 896y = 420$, (b) $931x - 896y = 420$. (3p)

3. Betrakta ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$.

   (a) Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen som uppfyller att $0 < x_1 < 11$, $x_i = x_{i+1}$ för $i \in \{2, 3\}$, och $x_j > 0$ för $j \in \{2, 3, 4\}$. (1p)

   (b) Hur många heltalslösningar som uppfyller att $-1 \leq x_i < 14$, $i = 1, 2, 3, 4$, finns det? (2p)

4. (a) Skriv den booleska funktionen $f(x, y, z) = \overline{xy} + \overline{y}z$ på fullständig disjunktiv normalform. (2p)

   (b) Visa att $5 | (2^{3n} - 3^n)$ för alla heltal $n \geq 1$. (1p)

5. Låt A vara mängden av alla positiva heltal j sådana att $10000000 \leq j \leq 80000000$. Låt $B \subseteq A$ vara en delmängd till A som består av alla tal som innehåller följden 1234 och låt C vara en delmängd till A som består av alla tal som innehåller följden 3456. Definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på mängden $A \times (B \cup C)$ genom att sätta $(x, y)\ \mathcal{R}_1\ (u, v)$ om

   - x och u båda tillhör mängden $B \cup C$, eller
   - x och u båda inte tillhör mängden $B \cup C$.

   Visa att $\mathcal{R}_1$ är en ekvivalensrelation, bestäm den partition som $\mathcal{R}_1$ ger upphov till, samt bestäm antalet element i varje ekvivalensklass. (3p)

6. Låt D vara mängden av alla positiva delare till talet 132. Definiera en relation $\mathcal{R}_2$ på D genom att sätta $x\ \mathcal{R}_2\ y$ om $x | y$. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en partialordning på D, rita Hassediagrammet för po-mängden $(D, \mathcal{R}_2)$ samt avgör om $(D, \mathcal{R}_2)$ är ett lattice. (3p)

7. Låt G vara grafen som fås från en cykel C_5 av längd 5 genom att lägga till en kant mellan två hörn som inte är grannar i C_5. Bestäm kromatiska polynomet för G samt bestäm minsta antalet kanter som måste tas bort från G för att få en bipartit graf. (3p)

Lösningsskisser för tentamen 2020-01-04

1. Använd induktion över n.

2. (a) Eftersom $\text{sgd}(931, 896) = 7$ kan ekvationen skrivas $133x + 128y = 60$. Euklides algoritm ger sedan att $1 = 53 \cdot 128 - 51 \cdot 133$ och alltså att $60 = 128 \cdot 3180 - 133 \cdot 3060$. En lösning är således $x = -3060$ och $y = 3180$. Alla lösningar ges följaktligen av $x = -3060 + 128n$ och $y = 3180 - 133n$, där n är ett godtyckligt heltal.

   (b) Ekvationen skrivas $133x - 128y = 60$, och eftersom $60 = 128 \cdot 3180 - 133 \cdot 3060$, så är en lösning till ekvationen x= -3060 och $y = -3180$. Alla lösningar ges följaktligen av $x = -3060 - 128n$ och $y = -3180 - 133n$, där n är ett godtyckligt heltal.

3. (a) Villkoren $0 < x_1 < 11$ och $x_2 = x_3 = x_4 > 0$ ger att ekvationen kan skrivas $x_1 + 3x_2 = 40$, där $0 < x_1 < 11$ och $x_2 > 0$. Eftersom $x_1 < 11$ så måste $3x_2 > 29$, och därmed $10 \geq x_2$. Prövning ger sedan att lösningarna är $x_2 = x_3 = x_4 = 10, x_1 = 10$, $x_2 = x_3 = x_4 = 11, x_1 = 7$, $x_2 = x_3 = x_4 = 12, x_1 = 4$, $x_2 = x_3 = x_4 = 13, x_1 = 1$. Alltså finns precis 4 lösningar till ekvationen.

   (b) Ekvationen kan skrivas $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 44$ där $0 \leq y_i \leq 14$. Inklusion-exklusion kombinerat med formeln för antalet lösningar hos staketproblem ger sedan att antalet lösningar är $\binom{47}{44} - 4\binom{32}{29} + 6\binom{17}{14}$.

4. (a) (a) $f(x, y, z) = \overline{xy} + \overline{y}z = \overline{x} + \overline{y} + \overline{y}z = \overline{x} + \overline{y}$ ger tabellen

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

   och $f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z$.

   (b) $2^{3n} - 3^n = 8^n - 3^n \equiv 3^n - 3^n \equiv 0 \mod 5$.

5. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation.

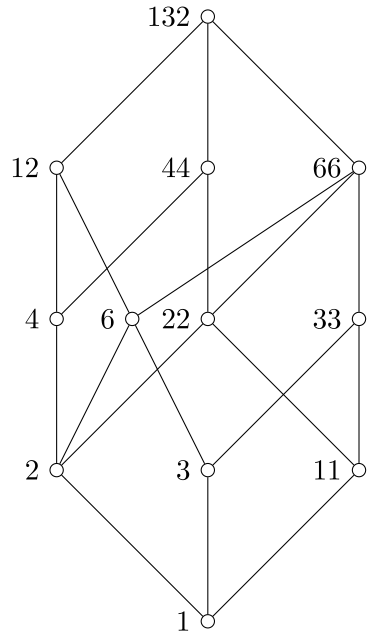
   Partitionen som $\mathcal{R}_1$ ger upphov till är $(B \cup C) \times (B \cup C) \bigcup (A \setminus (B \cup C) \times (B \cup C)$.

   Vi har att $|A| = 70000001$ och $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$. Vidare gäller att $|B| = 10^4 + 4 \cdot 7 \cdot 10^3 - 1$ ty antalet tal som börjar med följden 1234 i A är 10^4 och antalet tal i A som innehåller 1234 men inte börjar med denna följd är $4 \cdot 7 \cdot 10^3 - 1$, där vi måste dra bort 1 för att inte räkna talet 12341234 två gånger. På samma sätt fås att $|C| = 10^4 + 4 \cdot 7 \cdot 10^3 - 1$. $|B \cap C| = 2 + 10^2 + 2 \cdot 7 \cdot 10$, eftersom $12343456, 34561234 \in B \cap C$ och det finns $10^2 + 2 \cdot 7 \cdot 10$ tal i A som innehåller följden 123456. Alltså gäller att $|B \cup C| = 76 \cdot 10^3 - 244$. Detta ger att

   $|(B \cup C) \times (B \cup C)| = (76 \cdot 10^3 - 244)^2$ och

   $|(A \setminus (B \cup C) \times (B \cup C)| = (70000001 - (76 \cdot 10^3 - 244)) \cdot (76 \cdot 10^3 - 244)$.

6. Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och alltså en partialordning. Vi har att $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ och Hassediagrammet ser ut på följande sätt:



Från Hassediagrammet ser vi att po-mängden är ett lattice.

7. Vi får en bipartit graf genom att ta bort en av kanterna i den ursprungliga 5-cykeln C_5 som ligger i den triangel som bildas av att en kant adderas till C_5.

   Om vi låter $G = C_5{+}e$ beteckna grafen som fås genom att lägga till kanten e till C_5, och betecknar med e' den kant på C_5 som inte delar något hörn med e, så gäller, enligt rekursionsformeln för kromatiska polynom,

$$P(G,\lambda) = P(G{-}e',\lambda){-}P(G{\cdot}e',\lambda) = \lambda(\lambda{-}1)^3(\lambda{-}2){-}\lambda(\lambda{-}1)(\lambda{-}2)^2 = \lambda(\lambda{-}1)(\lambda{-}2)(\lambda^2{-}3\lambda{+}3),$$

   där den näst sista likheten följer direkt från multiplikationsprincipen.