Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2021-08-28 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. Finns det något tal a så att likheten
$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k)=a(2n^3-2n)$$
gäller för alla heltal $n \geq 1$? Bevisa i så fall ditt påstående. (3p)

2. (a) Avgör om sista siffran i talen 33^{327} och 327^{33} är lika. (1p)

   (b) John och Paul säljer hembakta bullar och rulltårtor för 21 respektive 37 kr. Hur många av varje sort kan de ha sålt om de säljer för totalt 954 kr? (2p)

3. På hur många sätt kan man fördela 30 bollar på 5 olika lådor om

   (a) bollarna är identiska och låda 1 och 3 båda ska innehålla minst 4 bollar. (1p)

   (b) bollarna är identiska, alla lådor ska innehålla minst en boll och låda 1 och 2 ska innehålla högst 5 bollar? (1p)

   (c) bollarna är olika och alla bollar ligger ej i samma låda? (1p)

4. (a) Hur många olika icke-isomorfa träd med fem hörn finns det? (1p)

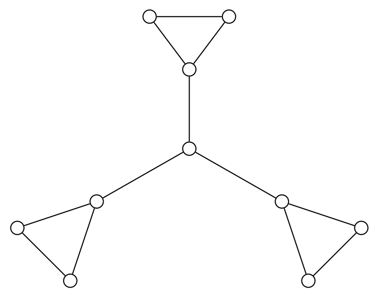
   (b) Visa att
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{n-1},$$
för varje jämnt heltal $n \geq 2$. (Ledning: Använd binomialsatsen.) (2p)

5. Från bokstäverna i ordet SOMMARKÄNSLA kan olika ”ord” (d.v.s. följder av bokstäver) bildas genom att välja ut ett godtyckligt antal av dessa bokstäver och sätta samman dem till en följd. Låt A vara mängden av alla ord som kan bildas på detta sätt. Definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på A genom att sätta $x\ \mathcal{R}_1\ y$ om x och y innehåller precis samma bokstäver, men inte nödvändigtvis lika många av varje sort. (Således gäller t.ex. att SOA och SOAA står i relation till varandra under $\mathcal{R}_1$, medan SOA och SOM inte gör det.) Visa att $\mathcal{R}_1$ är en ekvivalensrelation och bestäm antalet olika ekvivalensklasser, samt antalet element i ekvivalensklassen [SOMMARKÄNSLA].
(3p)

Var god vänd!

6. Låt X vara mängden av alla positiva delare till talet 24. En relation $\preceq$ på X ges av att sätta $x \preceq y$ om $x|y$. Visa att $\preceq$ är en partialordning på X, rita hassediagrammet för po-mängden $(X, \preceq)$, samt sortera po-mängden $(X, \preceq)$ topologiskt. (3p)

7. Bestäm ett uttryck för det kromatiska polynomet för nedanstående graf G. Bestäm även hur många kanter som komplementet till G innehåller. (3p)



Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2021-08-28

1. Sätt in t.ex. $n = 2$, så fås att $a = 1/3$. Använd sedan induktion över n.

2. (a) $33^{327} \equiv 7 \mod 10$ och $327^{33} \equiv 7 \mod 10$ ger att de båda talens sista siffra är lika.

   (b) Vi söker lösningar till den diofantiska ekvationen $21x + 37y = 954$. Euklides algoritm ger att $4 \cdot 37 - 7 \cdot 21 = 1$.

   En lösning är således $x = -6678$ och $y = 3816$, och alla lösningar ges av $x = -6678 + 37n$ och $y = 3816 - 21n$, där n är ett heltal. Den enda lösningen där både x och y är positiva är därmed $x = 19$ och $y = 15$.

3. (a) Vi söker antalet lösningar till staketproblemet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$, där $x_1, x_3 \geq 4$ och $x_2, x_4, x_5 \geq 0$. Ekvationen kan skrivas $y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 22$, $y_i \geq 0$ och antalet lösningar är således $\binom{26}{22}$, vilket är sökt antal.

   (b) Vi söker antalet lösningar till staketproblemet $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$, $1 \leq x_1, x_2 \leq 5$, och $x_3, x_4, x_5 \geq 1$, vilket är $\binom{29}{25} - 2\binom{24}{20} + \binom{19}{15}$.

   (c) Eftersom bollarna är olika finns 5^{30} sätt att fördela dem på 5 lådor. Antalet sätt att fördela alla bollar på en och samma låda är precis 5, varför sökt antal är $5^{30} - 5$.

4. (a) Det finns precis 3 st sådana icke-isomorfa träd.

   (b) Binomialsatsen ger att

$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i (-1)^{n-i},$$

   d.v.s.

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 0.$$

5. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation.

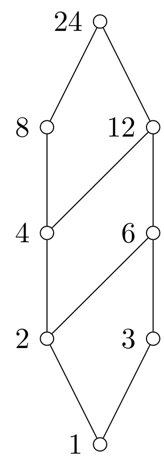
   Eftersom det finns 9 olika bokstäver i ordet SOMMARKÄNSLA så finns det $2^9 - 1$ olika ekvivalensklasser.

   Antalet element i ekvivalensklassen [SOMMARKÄNSLA] är

$$\frac{12!}{2!2!2!} + 3\frac{11!}{2!2!} + 3\frac{10!}{2!} + 9!$$

   eftersom bokstäverna S, M och A förkommer två gånger i SOMMARKÄNSLA och därmed kan förekomma en eller två gånger i ett ord i denna ekvivalensklass. Övriga bokstäver förekommer precis en gång.

6. Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och alltså en partialordning. Hassediagrammet ser ut på följande sätt:



Ett sätt att topologiskt sortera elementen är $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ och definiera totalordningen $\mathcal{R}$ genom att sätta $x\mathcal{R}y$ om x kommer före y i denna lista.

7. Multiplikationsprincipen ger att kromatiska polynomet för G är $\lambda\left((\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)\right)^3$, ty en första färg till det ”centrala” hörnet som har en kant till varje triangel kan väljas på λ sätt och sedan har vi $(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)$ möjligheter för varje triangel.

   Grafen G har 10 hörn och 12 kanter, så komplementet till G har $\binom{10}{2} - 12 = 33$ kanter.