Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2021-10-26 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. Visa att
$$4 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + \cdots + (3n-2)(2n-2) = 2n^3 - 2n^2$$
för alla heltal $n \geq 2$. (3p)

2. (a) Avgör om det finns en multiplikativ invers till $14 \mod 8$. (1p)

   (b) Ange samtliga heltalslösningar till $87x + 105y = 6000$. (2p)

3. (a) Låt B vara mängden som innehåller alla ”ord” (d.v.s. följder av bokstäver) som kan bildas med fem av bokstäverna i ordet BARRSKOGSBÄR (så t.ex. ordet KÄRRA tillhör mängden B). Bestäm $|B|$. (2p)

   (b) Bestäm för vilka värden på a och b som den kompletta bipartita grafen $K_{a,b}$ innehåller en Hamiltoncykel. (1p)

4. (a) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z)$ med 3 variabler uppfyller att $f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) \neq f(0, 1, 0)$? (1p)

   (b) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z, w)$ med 4 variabler uppfyller att $f(0, 0, 0, 1) + f(0, 0, 1, 0) = f(0, 0, 1, 1)$ (boolesk addition)? (2p)

5. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ som definieras genom att sätta $(u, v)\ \mathcal{R}\ (x, z)$ om $u + x$ är ett jämnt heltal. Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation samt bestäm alla skilda ekvivalensklasser. (3p)

6. Låt G vara grafen med hörnmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ och där två hörn i och j är grannar om

   - $1 \leq i \leq 4$ och $1 \leq j \leq 4$,
   - $5 \leq i \leq 8$ och $5 \leq j \leq 8$, eller
   - $9 \leq i \leq 12$ och $9 \leq j \leq 12$;

   G innehåller dessutom kanter mellan hörnen 4 och 5, 5 och 9, samt 4 och 9. Avgör om G är planär. Bestäm även kromatiska polynomet för G. (3p)

7. Låt $E = \{21, 22, \ldots, 40\}$ och definiera relationen $\mathcal{R}_2$ på E genom att för $x, y \in E$ sätta $x\ \mathcal{R}_2\ y$ om $x - y$ är ett icke-negativt heltal som är delbart med 3. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en partialordning och rita dess Hassediagram. (3p)

Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2021-10-26

1. Använd induktion över n.

2. (a) Prövning ger att det inte finns någon multiplikativ invers till $14 \mod 8$.

   (b) Euklides algoritm ger att $\mathrm{sgd}(87, 105) = 3$, så ekvationen kan skrivas $29x + 35y = 2000$ och Euklides algoritm ”baklänges” ger $5 \cdot 35 - 6 \cdot 29 = 1$.

   En lösning är således $x = -12000$ och $y = 10000$, och alla lösningar ges av $x = -12000 + 35n$ och $y = 10000 - 29n$, där n är ett heltal.

3. (a) Ordet BARRSKOGSBÄR innehåller totalt 8 olika bokstäver, 3 st R, 2 st B och 2 st S. Antalet olika “ord” med 5 st bokstäver är alltså

$$\binom{8}{5}5! + \binom{3}{1}\binom{7}{3}\frac{5!}{2!} + \binom{3}{2}\binom{6}{1}\frac{5!}{2!2!} + \binom{7}{2}\frac{5!}{3!} + \binom{2}{1}\frac{5!}{3!2!},$$

   där första termen räknar antalet ord med 5 olika bokstäver, andra termen räknar antalet ord där precis en bokstav förekommer 2 gånger, tredje termen räknar antalet ord där två bokstäver förekommer två gånger, fjärde termen räknar antalet ord med 3 st R och 2 andra olika bokstäver, och sista termen räknar antalet ord med 3 st R och en bokstav som förekommer två gånger.

   (b) Om $a = b$ så finns en Hamiltoncykel, annars inte.

4. (a) Antalet sådana booleska funktioner är 2^6, ty om vi väljer funktionsvärdet $f(0, 0, 0)$, så har vi fixerat $f(1, 1, 1)$ och $f(0, 1, 0)$ också.

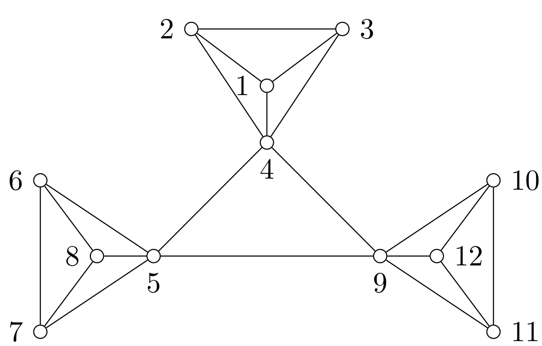
   (b) Antalet sådana booleska funktioner är 2^{15}, ty om vi väljer funktionsvärdena $f(0, 0, 0, 1)$ och $f(0, 0, 1, 0)$, så är även $f(0, 0, 1, 1)$ entydigt bestämt.

5. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation.

   Partitionen som $\mathcal{R}$ ger upphov till är

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{2k : k \in \mathbf{Z}\} \times \mathbf{Z} \cup \{2k + 1 : k \in \mathbf{Z}\} \times \mathbf{Z}.$$

6. Grafen ser ut som följer:



   Som synes är grafen planär. Vidare är kromatiska polynomet lika med $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)((\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3))^3$, ty vi kan välja 3 olika färger till triangeln $4 \to 5 \to 9$ på $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ olika sätt, och sedan kan resterande färger till varje kopia av K_4 väljas på $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ olika sätt.

7. Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, och därmed en partialordning. Hassediagrammet ser ut på följande sätt.