Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2022-01-04 kl. 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. Visa att
$$\sum_{k=0}^{n} 4 \cdot 5^k = 5^{n+1} - 1$$
för alla heltal $n \geq 0$. (3p)

2. (a) Vad blir den minsta positiva resten då $61 \cdot 2^{1000} + 2^{2000}$ delas med 33? (1p)

   (b) Ange alla positiva heltal (x, y) sådana att $60x + 92y = 4000$. (2p)

3. (a) Låt $f(x, y, z) = xy + xz + (x + y)\bar{x}\bar{y}$ vara en boolesk funktion med tre variabler. Skriv funktionen på fullständig konjunktiv normalform. (2p)

   (b) Hur många positiva heltal delar minst ett av talen $a = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 19^4$ och $b = 3^2 \cdot 5^8 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^5 \cdot 17 \cdot 19$? (1p)

4. (a) Hur många delmängder till $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ innehåller minst en av delmängderna $\{1, 2\}$ och $\{3, 4\}$, men inte delmängden $\{1, 10\}$? (1p)

   (b) Rainer sorterar i sin bokhylla bestående av 12 olika deckare och 11 identiska diktsamlingar. På hur många sätt kan han placera böckerna i en hylla om alla deckare måste stå i en följd bredvid varandra? Om han istället vill att inte någon diktsamling står bredvid en annan diktsamling, hur många möjligheter finns då? (2p)

5. Låt B vara mängden av alla olika följder av längd 10 som består av ettor och nollor och där ett udda antal siffror i följden är ettor. Definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på B genom att sätta $x \; \mathcal{R}_1 \; y$ om summan av de ingående siffrorna i x är mindre än eller lika med summan av de ingående siffrorna i y. Avgör om $\mathcal{R}_1$ är en partialordning samt bestäm $|B|$. Motivera noggrant. (3p)

6. (a) Finns det någon graf (utan multipla kanter och loopar) med gradtalen $7, 7, 5, 5, 3, 3, 2, 2$? Varför/varför inte? (1p)

   (b) Bestäm hur många stigar av längd 3 som den kompletta bipartita grafen $K_{7,8}$ innehåller. (2p)

7. Tilldela varje kant i den kompletta grafen K_7 med 7 hörn en vikt från mängden $\{1, 2, \ldots, 50\}$. Låt A vara mängden av alla viktade grafer som kan bildas på detta sätt. Som bekant har varje viktad graf i A ett billigaste uppspännande träd. Låt B vara mängden av alla olika billigaste uppspännande träd som kan bildas från en viktad graf i mängden A. Vi definierar en relation $\mathcal{R}_2$ på mängden B genom att sätta $T_1 \; \mathcal{R}_2 \; T_2$ om T_1 och T_2 har samma kostnad, där T_1 och T_2 är två viktade uppspännande träd. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en ekvivalensrelation och bestäm antalet olika ekvivalensklasser. Motivera noggrant! (3p)

Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2022-01-04

1. Använd induktion över n.

2. (a) Resten är 29.

   (b) Euklides algoritm ger att $\text{sgd}(60, 92) = 4$, så ekvationen kan skrivas $15x + 23y = 1000$ och Euklides algoritm "baklänges" ger $2 \cdot 23 - 3 \cdot 15 = 1$.

   En lösning är således $x = -3000$ och $y = 2000$, och alla lösningar ges av $x = -3000 + 23n$ och $y = 2000 - 15n$, där n är ett heltal.

   De positiva lösningarna är:

   $x = 13$, $y = 35$

   $x = 36$, $y = 20$

   $x = 59$, $y = 5$.

3. (a) (a) (a) $f(x, y, z) = xy + xz + (x + y)\bar{x}\bar{y}$ ger tabellen

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

   och $f = (x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + z)$.

   (b) Antalet positiva heltal som delar a är $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 27000$, och antalet tal som delar b är $3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 10368$. Antalet tal som delar både a och b är $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1440$. Sökt antal är alltså $27000 + 10368 - 1440 = 35928$.

4. (a) Antalet delmängder som innehåller $\{1, 2\}$ men inte $\{1, 10\}$ är 2^7, antalet som innehåller $\{3, 4\}$ men inte $\{1, 10\}$ är $3 \cdot 2^6$, och antalet som innehåller både $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, men inte $\{1, 10\}$ är 2^5. Sökt antal är alltså $5 \cdot 2^6 - 2^5 = 288$.

   (b) Om alla deckare ska stå bredvid varandra så finns det totalt $12! \cdot 12$ möjligheter, eftersom alla diktsamlingar är identiska medan deckarna kan permuteras på $12!$ sätt. Om inte någon diktsamling får stå bredvid en annan diktsamling, så finns det $12! \cdot \binom{13}{11}$, ty det finns $12!$ permutationer av deckarna och sedan 13 platser att välja på för 11 diktsamlingar.

5. Relationen är inte antisymmetrisk och alltså inte en partialordning. En följd som tillhör B har 1, 3, 5, 7, eller 9 ettor. Alltså gäller att $|B| = 2 \cdot \frac{10!}{1!9!} + 2 \cdot \frac{10!}{3!7!} + \cdot \frac{10!}{5!5!}$.

6. (a) Det finns inte någon sådan graf. (Försök att rita upp den!)

   (b) Det finns $8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6$ sådana stigar (ty vi ska välja ett hörn med gradtal 2 och ett hörn med gradtal 1 i varje del av grafen).

7. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, och därmed en ekvivalensrelation.

   Antalet olika ekvivalensklasser är $6 \cdot 50 - 6 + 1 = 295$, ty ett träd i B har en kostnad som tillhör mängden $C = \{6, 7, \ldots, 300\}$, och för alla tal c i C finns ett träd med kostnad c som är ett billigaste uppspännande träd i någon viktad K_7 där varje kant har en vikt i mängden $\{1, 2, \ldots, 50\}$. (Varför då?)