Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2022-08-27 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. (a) Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen $97x + 27y = 17$. (2p)

   (b) Beräkna 5^{327} mod 17. (1p)

2. Visa att $7 + 11 + 15 + \cdots + (4n + 3) = 2n^2 + 5n$, för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

3. (a) Från en grupp av 12 flickor och 11 pojkar skall 2 olika lag bildas. Hur många olika möjligheter att bilda de 2 olika lagen finns om varje lag skall bestå av 6 personer, och åtminstone en pojke skall finnas med i varje lag? (2p)

   (b) Visa att bland 12 heltal finns minst 2 stycken x, y sådana att $x - y$ är en multipel av 11. (1p)

4. Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 46$ om

   (a) $1 \leq x_1 \leq 10$, $x_2 \geq 21$, $x_3 \geq -12$, $x_4 \geq 0$. (1p)

   (b) $4 \leq x_i \leq 14$, $i = 1, 2, 3, 4$. (2p)

5. Låt A vara mängden av alla olika booleska funktioner $f(x, y)$ med 2 variabler x, y. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på A som definieras av att $f\mathcal{R}g$ om $f(x, 1) = g(x, 1)$, d.v.s. $f(x, y) = g(x, y)$ om $y = 1$. Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation? Bestäm i så fall den partition av A som $\mathcal{R}$ ger upphov till. (3p)

6. Låt $B = \{6, 7, 8, 9\} \times \{10, 11\}$ och definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på mängden B genom att sätta $(x_1, x_2)\mathcal{R}_1(y_1, y_2)$ om $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.

   (a) Undersök om relationen $\mathcal{R}_1$ är en partialordning. (2p)

   (b) Om $\mathcal{R}_1$ är en partialordning, bestäm om po-mängden $(B, \mathcal{R}_1)$ i så fall har några största och/eller minsta element. Om $\mathcal{R}_1$ inte är en partialordning, definiera en relation på B som är en partialordning. (1p)

7. Betrakta en cykel C_6 med hörnmängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Låt G vara komplementet till C_6. Från G bildar vi en viktad graf genom att tilldela varje kant ij vikten $2(i + j)$. Bestäm ett billigaste uppspännande träd i denna viktade graf. Avgör även om G innehåller en Hamiltoncykel. (3p)

Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2022-08-27

1. (a) Euklides algoritm ger $1 = 27 \cdot 18 - 5 \cdot 97$ och en lösning är således $x = -85$, $y = 306$. Alla lösningar är $x = -85 + 27n$, $y = 306 - 97n$, där n är ett godtyckligt heltal.

   (b) $5^{327} \equiv 10 \bmod 17$.

2. Använd induktion över n.

3. (a) Antalet sätt att bilda två olika lag är $\binom{23}{12}\binom{12}{6}/2$ ty vi kan först välja ut 12 personer bland 23 på $\binom{23}{12}$ olika sätt, och sedan bilda 2 olika lag på $\binom{12}{6}/2$ olika sätt (eftersom varje laguppdelning svarar mot 2 olika sätt att välja ut 6 olika personer bland 12).

   Antalet sätt att välja 2 lag där minst ett endast innehåller flickor är $\binom{12}{6}\binom{17}{6} - \binom{12}{6}/2$, ty vi kan först välja ut ett lag som bara innehåller flickor på $\binom{12}{6}$ sätt och därefter välja ett lag bland 17 återstående personer på $\binom{17}{6}$; emellertid har vi då räknat de par av lag som bara består av flickor 2 ggr, varför vi drar bort $\binom{12}{6}/2$, vilket är antalet par av lag där båda består av flickor.

   (b) Lådprincipen ger att bland 12 tal finns minst två stycken som har samma rest vid divsion med 11. Alltså finns två tal x och y sådana att $x - y$ är en multipel av 11.

4. (a) Ekvationen och villkoren $1 \leq x_1 \leq 10$, $x_2 \geq 21$, $x_3 \geq -12$ och $x_4 \geq 0$, är ekvivalent med ekvationen $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 36$, $0 \leq y_1 \leq 9$ och $y_i \geq 0$, $i = 2, 3, 4$. Antalet lösningar är alltså $\binom{39}{36} - \binom{29}{26}$.

   (b) Ekvationen kan skrivas $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 30$ där $0 \leq y_i \leq 10$. Inklusion-exklusion kombinerat med formeln för antalet lösningar hos staketproblem ger sedan att antalet lösningar är $\binom{33}{30} - 4\binom{22}{19} + 6\binom{11}{8}$.

5. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation.

   Det finns totalt $2^4 = 16$ olika booleska funktioner med 2 variabler. Partitionen av mängden A är

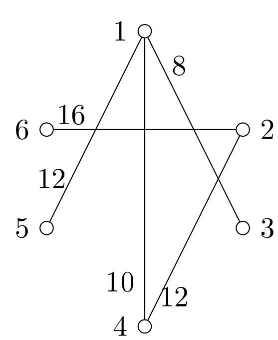
   $$A = \{\mathbf{0}, x\overline{y}, \overline{x}\overline{y}, \overline{y}\} \cup \{xy, x, xy + \overline{x}\overline{y}, x + \overline{y}\} \cup \{\overline{x}y, x\overline{y} + \overline{x}y, \overline{x}, \overline{x} + \overline{y}\} \cup \{y, x + y, \overline{x} + y, \mathbf{1}\},$$

   vilket kan visas genom att t.ex. tabulera alla 16 funktioner och undersöka vilka som har samma funktionsvärden då $y = 1$.

6. (a) Relationen är inte antisymmetrisk, och alltså inte en partialordning.

   En partialordning $\preceq$ på $\mathcal{R}_1$ ges av ordna elementen enligt följande: $(6, 10) \preceq (6, 11) \preceq (7, 10) \preceq (7, 11) \preceq (8, 10) \preceq (8, 11) \preceq (9, 10) \preceq (9, 11)$. (Det finns många olika lösningar.)

7. Ett billigaste uppspännande träd i G ges av följande figur:



   Grafen G har en Hamiltoncykel, t.ex. 1352641.