Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2022-10-25 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. (a) Ange samtliga positiva heltalslösningar till ekvationen $99x + 234y = 9000$. (2p)

   (b) Bestäm samtliga lösningar till $3x \equiv 5 \mod 9$. (1p)

2. Visa att för alla heltal $n \geq 2$ gäller

$$\sum_{k=0}^{n-2} (k+2) \cdot 2^{k+1} = (n-1) \cdot 2^n.$$

(3p)

3. (a) Hur många permutationer av bokstäverna i ordet SANNINGSSÄGARE som inte innehåller någon av följderna RENS eller GNAGARE finns det? (2p)

   (b) Är det sant att varje sammanhängande planär graf innhåller en hamiltoncykel? Bevis eller motexempel. (1p)

4. (a) Ange värdetabellen för den booleska funktionen $f(x, y, z) = \overline{\overline{x} + yz} + \overline{y + x\overline{z}}$. (2p)

   (b) Hur många booleska funktioner f med tre variabler uppfyller villkoren att $f(0, 0, 1) = f(1, 1, 1) \neq f(1, 0, 0) \neq f(1, 0, 1)$. (1p)

5. Vi bildar följder med bokstäverna A, B och K. Låt $\mathcal{A}$ vara mängden av alla sådana följder med 8 bokstäver som innehåller följden BAKA. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på $\mathcal{A}$ som definieras av att $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ om x och y innehåller lika många A. (Så till exempel gäller att BAKAKAKA $\mathcal{R}$ ABBABAKA medan BAKAKAKA $\not\mathcal{R}$ BAKAKAAA). Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation, samt bestäm antalet ekvivalensklasser och även antalet element i ekvivalensklassen [BAKAKAKA]. (3p)

6. Låt $B = \{6, 7, 8, 9\} \times \{10, 11\}$ och definiera en relation $\mathcal{R}_2$ på mängden B genom att sätta $(x_1, x_2) \mathrel{\mathcal{R}_2} (y_1, y_2)$ om antingen $x_1 > y_1$ eller $x_1 = y_1$ och $x_2 \geq y_2$.

   (a) Visa att $\mathcal{R}_2$ är en partialordning. (1p)

   (b) Rita Hassediagrammet för po-mängden $(B, \mathcal{R}_2)$ (1p)

   (c) Bestäm på hur många sätt po-mängden kan sorteras topologiskt. Motivera! (1p)

7. (a) Hur många icke-isomorfa träd med 5 hörn finns det? (1p)

   (b) Visa att kromatiska polynomet för ett träd T med n hörn är $P(T, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ (2p)

Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2022-10-25

1. (a) Euklides algoritm ger att $\text{sgd}(99, 234) = 9$ och alltså kan ekvationen skrivas $11x + 26y = 1000$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 26 \cdot 3 - 7 \cdot 11$ och en lösning är således $x = -7000$, $y = 3000$. Den allmänna lösningen är $x = -7000 + 26n$ och $y = 3000 - 11n$, där n är ett heltal.

   De positiva lösningarna blir således $(x, y) \in \{(20, 30), (46, 19), (72, 8)\}$.

   (b) Eftersom $\text{sgd}(3, 9) = 3$ och 3 inte delar 5, så saknar ekvationen lösningar.

2. Använd induktion över n.

3. (a) Antalet permutationer av ordet SANNINGSSÄGARE är $\frac{14!}{3!3!2!2!}$ ty ordet innehåller 3 st S, 3 st N, 2 st A och 2 st G. Antalet permutationer som innehåller RENS är $\frac{11!}{(2!)^4}$, antalet permutationer som innehåller GNAGARE är $\frac{8!}{3!2!}$ och antalet som innehåller både GNAGARE och RENS (d.vs. GNAGARENS) är $\frac{6!}{2!}$.

   Sökt antal är alltså $\frac{14!}{3!3!2!2!} - \frac{11!}{(2!)^4} - \frac{8!}{3!2!} + \frac{6!}{2!}$.

   (b) Ett träd är en planär graf som ej innehåller någon hamiltoncykel.

4. (a) $f(x, y, z) = \overline{\overline{x} + yz} + \overline{y + x\overline{z}} = \overline{y} + x\overline{z}$

   ger tabellen

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

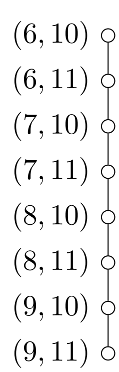
   (b) Antalet sådana funktioner är 2^5.

5. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation.

   Antalet ekvivalensklasser är 5 och $|[\text{BAKAKAKA}]| = 5\binom{4}{2}2^2 - 1$ eftersom det finns 5 platser för ordet BAKA, två st A kan placeras på 2 av 4 platser, de två övriga bokstäverna kan väljas på 2 sätt. Vi subtraherar också 1 eftersom vi annars skulle räkna följden BAKABAKA två gånger.

6. (a) Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv och alltså en partialordning.

   (b) Hassediagrammet ser ut som följer:



(c) Po-mängden kan bara sorteras topologiskt på ett sätt, eftersom det är en totalordning.

7. (a) Det finns ett sådant träd med största gradtal 4, ett sådant träd med största gradtal 3, och ett sådant träd där alla gradtal är 2. Totalt 3 st icke-isomorfa träd med 5 hörn alltså.

   (b) Använd t.ex. induktion över n.