Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2023-01-03 kl. 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. (a) Hans och Greta plockar lingon och kantareller i skogen för att sälja i sin butik. De säljer lingon för 50 kr/kg och kantareller för 65 kr/kg. En dag har de sålt för 13000 kr. Hur många kg lingon respektive kantareller kan det ha sålt under dagen? (2p)

   (b) Bestäm koefficienten framför x^6 i utveckling av $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{12}$. (1p)

2. Visa att för alla heltal $n \geq 2$ gäller

$$\sum_{k=1}^{n}(9k^2 - 9k) = 3n^3 - 3n.$$

(3p)

3. (a) Liam skall laga fruktsallad och har köpt 22 olika sorters frukt. Hans gäster kräver att antalet frukter som används i salladen skall vara ett primtal $p \geq 3$. På hur många sätt kan Liam välja ingredienserna till sin fruktsallad? (1p)

   (b) Liams bror Noel har köpt 12 olika glasspinnar. På hur många sätt kan han lägga sina 12 olika glasspinnar i 5 olika lådor? (1p)

   (c) När Noel dukar tar han 5 identiska skålar. På hur många olika sätt kan 5 identiska skålar och 6 olika glasspinnar ordnas i en följd om två glasspinnar inte får placeras bredvid varandra. (1p)

4. (a) Låt $\hat{K}_{3,6}$ vara grafen som fås från den kompletta bipartita grafen $K_{3,6}$ genom att underdela exakt en kant. Vad är kromatiska talet för $\hat{K}_{3,6}$? (1p)

   (b) Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ som ges av $\mathcal{R} = \{(1, 2), (3, 4), (2, 3)\}$. Vad är det minsta antalet ordnade par som måste läggas till $\mathcal{R}$ för att få en transitiv relation? (1p)

   (c) Är det sant att $A \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = A \cup B \cup \bar{C}$ för alla mängder A, B, C? (1p)

5. Låt $X = \{7, 8, 9, \ldots, 19\}$.

   (a) Visa att delbarhetsrelationen på X är en partialordning och rita hassediagrammet för po-mängden $(X, |)$. (2p)

   (b) Vilka maximala och minimala element har po-mängden $(X, |)$? (1p)

6. Låt J vara mängden av alla heltal som är delbara med 5. Definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på J genom att sätta $x\ \mathcal{R}_1\ y$ om $10|(x + y)$. Visa att $\mathcal{R}_1$ är en ekvivalensrelation på J och bestäm alla ekvivalensklasser som J ger upphov till. (3p)

Var god vänd!

7. Låt K_7 vara en komplett graf med hörnmängd $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

   (a) Avgör hur många olika stigar av längd 3 som K_7 innehåller. (1p)

   (b) Från K_7 bildar vi en viktad graf genom att för varje kant ij, där $i < j$, tilldela kanten vikten $\frac{i+j}{\text{sgd}(i,j)}$. Bestäm ett minimalt uppspännande träd i den viktade grafen. (2p)

Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2023-01-03

1. (a) Vi söker positiva heltalslösningar till ekvationen $50x + 65y = 13000$. Euklides algoritm ger att $\text{sgd}(50, 65) = 5$ och alltså kan ekvationen skrivas $10x + 13y = 2600$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 4 \cdot 10 - 3 \cdot 13$ och en lösning är således $x = 10400$, $y = -7800$. Den allmänna lösningen är $x = 10400 + 13n$ och $y = -7800 - 10n$, där n är ett heltal.

   Kravet att lösningarna skall vara icke-negativa ger nu att $-800 \leq n \leq -780$.

   (b) Koefficienten blir $\binom{12}{6} 2^6 3^6$.

2. Använd induktion över n.

3. (a) Antalet sätt är $\binom{22}{3} + \binom{22}{5} + \binom{22}{7} + \binom{22}{11} + \binom{22}{13} + \binom{22}{17} + \binom{22}{19}$.

   (b) Noel har 5^{12} möjligheter.

   (c) Eftersom två glasspinnar inte får placeras bredvid varandra måste de fem skålarna finnas i mellanrummen mellan alla sex glassar. Således finns $6!$ möjligheter.

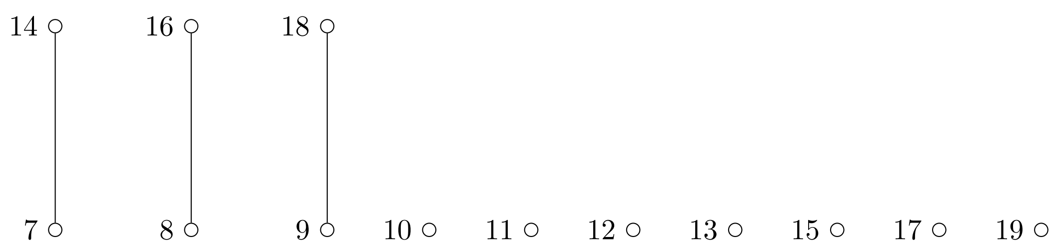
4. (a) Kromatiska talet är 3 eftersom det finns en udda cykel i $\hat{K}_{3,6}$.

   (b) Vi måste lägga till $(1, 3), (2, 4), (1, 4)$, så det minsta antalet är 3.

   (c) Likheten är inte sann, vilket till exempel kan visas med hjälpa av Venndiagram.

5. (a) Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv och alltså en partialordning.

   Hassediagrammet ser ut på följande sätt:



   (b) Alla element utom $14, 16, 18$ är minimala, och alla element utom $7, 8, 9$ är maximala.

6. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation.

   Om x är delbart med 5 så gäller antingen $x \equiv 0 \mod 10$ eller $x \equiv 5 \mod 10$. Alltså blir motsvarande partition av J: $J = [0] \cup [5]$, där $[0] = \{x \in J : x \equiv 0 \mod 10\}$ och $[5] = \{x \in J : x \equiv 0 \mod 10\}$.

7. (a) Om vi räknar stigar i meningen ordnade följder, så är antalet sådana stigar av längd tre $\binom{7}{4}4!$. Om vi är räknar antalet delgrafer som är stigar, så skall det antal divideras med 2. (Båda svaren kan alltså anses vara korrekta.)

(b) Ett minimalt uppspännande träd är följande: