Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2023-08-26 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. (a) Ange samtliga positiva heltalslösningar (x, y) till ekvationen $377x + 416y = 3250$ (2p)

   (b) Beräkna koefficienten framför a^9b^{18} i uttrycket $(a^3 + 2b^2)^{12} - (2a - 3b^6)^{12}$. (1p)

2. Visa att för alla heltal $n \geq 1$ gäller

$$2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \quad + n(3n - 1) = n^2(n + 1).$$

(3p)

3. (a) Låt $f(x, y, z) = x \cdot \overline{y \cdot z} + \overline{\overline{x \cdot z} + \overline{y} \cdot \overline{z}}$ vara en boolesk funktion av tre variabler. Skriv f på fullständig konjunktiv normalform (2p)

   (b) Hur många delgrafer som är slutna Eulervägar har den kompletta bipartita grafen $K_{2,4}$? (1p)

4. (a) Hur många heltal mellan 500 och 2000 är delbara med precis ett av talen 2, 3 och 5? (2p)

   (b) Hur många positiva heltalslösningar till ekvationen $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 27$ uppfyller att $x_1, x_2, x_3 \geq 3$? (1p)

5. Från bokstäverna i ordet KÖRSBÄRSTRÄD kan olika ”ord” (d.v.s. följder av bokstäver) bildas genom att välja ut ett godtyckligt antal av dessa bokstäver och sätta samman dem till en följd. Låt A vara mängden av alla ord som kan bildas på detta sätt. Definiera en relation $\mathcal{R}$ på A genom att låta $x\mathcal{R}y$ om x och y innehåller lika många bokstäver. (Således gäller t.ex. att RÖD och BÄR står i relation till varandra under $\mathcal{R}$, medan RÖD och RÖ inte gör det.) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation, bestäm antalet ekvivalensklasser samt antalet element i ekvivalensklassen [BRÖD]. (3p)

6. Låt B vara mängden av alla olika följder av längd högst 8 som består av fyror och nior, och där alla fyror kommer före alla nior. (Till exempel gäller att $44999 \in B$, $44 \in B$ och $9999 \in B$, medan $44994 \notin B$.) En relation $\mathcal{R}_2$ på B definieras genom att sätta $x \; \mathcal{R}_2 \; y$ om antingen

   - följden y innehåller fler fyror än x, eller
   - x och y innehåller lika många fyror och y innehåller minst lika många element som x.

   Avgör om $\mathcal{R}_2$ en partialordning. Är $\mathcal{R}_2$ en totalordning? (3p)

Var god vänd!

7. Låt K_5 vara den kompletta grafen med 5 hörn. Hur många olika icke-isomorfa uppspännande träd innehåller K_5? Bestäm även det kromatiska polynomet för grafen som erhålls från K_5 genom att underdela precis en kant i K_5. (3p)

Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2023-08-26

1. (a) Vi söker positiva heltalslösningar till ekvationen $377x + 416y = 3250$. Euklides algoritm ger att $\text{sgd}(377, 416) = 13$ och alltså kan ekvationen skrivas $29x + 32y = 250$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 10 \cdot 32 - 11 \cdot 32$ och en lösning är således $x = -2750$, $y = 2500$. Den allmänna lösningen är $x = -2750 + 32n$ och $y = 2500 - 29n$, där n är ett heltal.

   Kravet att lösningarna skall vara positiva ger nu att $x = 2, y = 6$ är enda lösningen.

   (b) Binomialsatsen ger att koefficienten är $\binom{12}{3} \cdot 2^9 \cdot 28$.

2. Använd induktion över n.

3. (a) $f(x, y, z) = x \cdot \overline{y \cdot z} + \overline{\overline{x \cdot z} + \overline{y} \cdot \overline{z}}$ ger tabellen

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

   Detta ger att $f = (x + y + z)(x + y + \overline{z})(x + \overline{y} + z)(x + \overline{y} + \overline{z})$.

   (b) Antalet slutna Eulervägar är dels $K_{2,4}$ själv, och antalet cykler i $K_{2,4}$, vilket är $\binom{4}{2} + 1$.

4. (a) Med ett Venndiagram ser vi att vi söker

$$|A \cup B \cup C| - |A \cap B| - |A \cap C - |B \cap C| + 2|A \cap B \cap C|$$

$$= |A| + |B| + |C| - 2|A \cap B| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C| + 3|A \cap B \cap C|$$

$$= 750 + 500 + 300 - 2 \cdot (250 + 150 + 100) + 3 \cdot 50 = 700.$$

   (b) Det finns endast en lösning, nämligen $x_1 = x_2 = x_3 = 3$.

5. (a) Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation.

   Antalet ekvivalensklasser är 12, och

$$|[\text{BRÖD}]| = \binom{8}{4} 4! + \binom{7}{2}\binom{3}{1}\frac{4!}{2!} + \binom{3}{2}\frac{4!}{2!2!} + \binom{7}{1}\frac{4!}{3!},$$

   ty ett ord med 4 bokstäver kan bestå av 4 olika bokstäver, precis en dublett, exakt två dubletter, eller 3 st R och en ytterligare bokstav.

6. Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv och alltså en partialordning. Eftersom det för varje par av element gäller att de står i relation till varandra, så är relationen även en totalordning.

7. Prövning ger att K_5 har 3 icke-isomorfa uppspännande träd. Det kromatiska polynomet för grafen som fås från K_5 genom att underdela precis en kant kan bestämma genom att använda den vanliga rekursionsformeln. Låt K_5^+ vara grafen som fås från K_5 genom att underdela precis en kant. Kromatiska polynomet för $K_5^+ - e$ (K_5^+ minus en kant som slutar vid hörnet av valens 2) är $\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)^2$. Vidare genom att kontrahera en kant som slutar vid hörnet av valens 2 fås K_5 som har kromatiskt polynom $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$.

   Alltså är det sökta kromatiska polynomet

$$\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)^2-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-5\lambda+7).$$

.