Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2023-10-24 kl. 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. (a) Ange samtliga heltalslösningar (x, y) till ekvationen $798x + 768y = 66$ (2p)

   (b) Ange entalssiffran i talet $3^{14} + 4^{15}$. (1p)

2. Visa att $a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, för alla heltal $n \geq 1$ och $a, q \in \mathbf{R}$, där $q \neq 1$. (3p)

3. (a) Hur många booleska funktioner $f(x, y, z)$ med 3 variabler x, y, z finns det som uppfyller villkoret att $f(0, 0, 1) + f(0, 0, 0) + f(1, 1, 1) \leq f(1, 0, 1)$? (Vi adderar förstås booleskt.) (2p)

   (b) Låt $\mathcal{R}= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$ vara en relation på $\{1, 2, 3\}$. Rita relationsgrafen för $\mathcal{R}$ och avgör om $\mathcal{R}$ är transitiv. (1p)

4. (a) Lisa har 18 olika böcker, 3 på spanska och resterande 15 på 15 andra olika språk. Hon vill ställa böckerna på två hyllor i sin bokhylla, så att på den översta hyllan är varannan bok på spanska och varannan bok på något annat språk. På hur många olika sätt kan hon ordna böckerna i sina två hyllor? (2p)

   (b) Lisa vill efter denna ansträngning äta mellanmål. Hjälp henne att bestämma hur många mellanmål hon kan bilda genom att välja ut 2 frukter bland 5 olika, en sorts kaffe bland 4 olika sorter, samt 5 sorters kakor bland 9 olika sorter. (1p)

5. Definiera en relation $\mathcal{R}_2$ på de naturliga talen $\mathbf{N}$ genom att sätta $x\ \mathcal{R}_2\ y$ om $x^2 - y^2 \equiv 0 \mod 5$. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en ekvivalensrelation och bestäm den partition av $\mathbf{N}$ som $\mathcal{R}_2$ ger upphov till. (3p)

6. Låt $A = \{x \in \mathbf{N} : x = 10k, k \in \mathbf{N}\}$ och $B = \{x \in \mathbf{N} : 0 \leq x \leq 9\}$. Betrakta mängden $A \times B$, och definiera en relation $\mathcal{R}_3$ på $A \times B$ genom att sätta $(a, b)\ \mathcal{R}_3\ (c, d)$ om $a + b \leq c + d$. Visa att $\mathcal{R}_3$ är en partialordning och avgör om po-mängden $(A \times B, \mathcal{R}_3)$ har något/några största eller minsta element. (3p)

7. Låt $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och låt $\mathcal{B}$ vara mängden av alla delmängder till B med kardinalitet 2. Definiera en graf G med hörnmängd $\mathcal{B}$ där två hörn $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ är grannar om och endast om $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Avgör hur lång den kortaste cykeln i G är och bestäm även $\chi(G)$. (3p)

Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2023-10-24

1. (a) Vi söker heltalslösningar till ekvationen $798x+768y = 66$. Euklides algoritm ger att $\mathrm{sgd}(798, 768) = 6$ och alltså kan ekvationen skrivas $133x + 128y = 11$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 53 \cdot 128 - 51 \cdot 133$ och en lösning är således $x = -561$, $y = 583$. Den allmänna lösningen är $x = -561 + 128n$ och $y = 583 - 133n$, där n är ett heltal.

   (b) Entalssiffran är 3.

2. Använd t.ex. induktion över n.

3. (a) Vi delar upp i två fall.

   Antag först att $f(1, 0, 1) = 0$. Då är $f(0, 0, 1) = f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 0$, och det finns 2^4 sådana funktioner.

   Antag nu att $f(1, 0, 1) = 1$. Då är kravet i olikheten alltid uppfyllt, och det finns 2^7 sådana funktioner

   Totalt finns alltså $2^4 + 2^7$ sådana funktioner.

   (b) Grafen har hörnmängden $\{1, 2, 3\}$ och elementen i $\mathcal{R}$ som riktade kanter. $\mathcal{R}$ är transitiv.

4. (a) Det kan stå $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ eller 7 böcker på översta hyllan.

   Låt b_i vara antalet sätt att placera böckerna så att i st står på översta hyllan. Då gäller att $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, men tolkningarna att $i \geq 1$, $i \geq 2$ eller $i \geq 3$ är också alla acceptabla om de motiveras.

   Vi får att

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 18! \\
b_1 &= 18 \cdot 17! \\
b_2 &= (15 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 16! \\
b_3 &= (\tbinom{15}{2} \cdot 3 \cdot 2! + \tbinom{3}{2} \cdot 15 \cdot 2!) \cdot 15! \\
b_4 &= (\tbinom{15}{2} \cdot \tbinom{3}{2} \cdot 2^3) \cdot 14! \\
b_5 &= (\tbinom{15}{3} \cdot \tbinom{3}{2} \cdot 3! \cdot 2! + \tbinom{15}{2} \cdot 3! \cdot 2!) \cdot 13! \\
b_6 &= (\tbinom{15}{3} \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2) \cdot 12! \\
b_7 &= (\tbinom{15}{4} \cdot 3! \cdot 4!) \cdot 11!
\end{aligned}
$$

   Totala antalet sätt att placera böckerna är alltså $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7$.

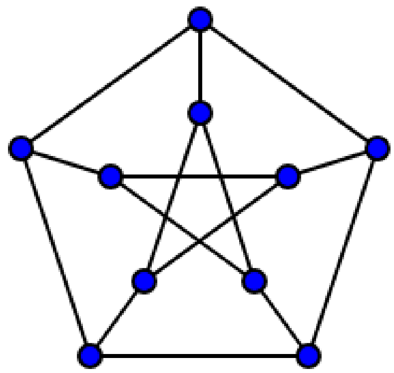
   (b) Det finns $\binom{5}{2} \cdot 4 \cdot \binom{9}{5}$ olika sorter.

5. Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation.

   Ekvivalensklasserna är $[0] = \{0, 5, 10, \dots\}$, $[1] = [4] = \{1, 6, 11, \dots\} \cup \{4, 9, 14, \dots\}$, och $[2] = [3] = \{2, 7, 12, \dots\} \cup \{3, 8, 13, \dots\}$, som alltså utgör en partition av $\mathbb{N}$.

6. Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv och alltså en partialordning. (Det är även en totalordning, eftersom de ordnade paren kan ”identifieras” som icke-negativa heltal som ordnas enligt relationen $\leq$.) Största (och maximala) element saknas. Minsta element är $(0, 0)$.

7. Grafen ser ut som följer.



Från figuren ser vi att den kortaste cykeln i G har längd 5. Eftersom G innehåller en cykel av längd 5, så gäller $\chi(G) \geq 3$. Att $\chi(G) \leq 3$ ser vi genom att korrekt färga grafen med 3 färger. (Gör detta!) Alltså får vi att $\chi(G) = 3$.