Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA65/TEN1

Tentamen i Diskret Matematik

2024-01-02 kl. 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv din anonyma kod på varje ark som lämnas in. Skriv bara på ena sidan och bara en uppgift på varje ark. Alla lösningar ska motiveras väl och förenklas så långt som möjligt. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng och för betyg 3/4/5 krävs 8/12/16 poäng totalt. Skrivningsresultat meddelas via epost och visningstid kommer att anslås på kurshemsidan.

1. (a) Ange samtliga positiva heltalslösningar (x, y) till ekvationen $462x + 54y = 6000$. (2p)

   (b) Är alla grafer med hörnmängd $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, som innehåller precis två cykler av längd 3, isomorfa? (1p)

2. Visa att
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{n}{4n+1}$$
   för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

3. Nelly har 3 blåa kulor, 5 gröna kulor, 2 röda kulor och 11 gula kulor i sin kulpåse. (Kulor av samma färg betraktas som identiska.) Hon drar slumpmässigt 10 kulor från kulpåsen.

   (a) På hur många sätt kan hon ordna dessa 10 kulor i en rad från vänster till höger om hon inte drog några gula kulor alls? (1p)

   (b) Vad blir svaret i (a) om hon istället drog 5 gula, 3 blå och 2 gröna, och 2 st gula kulor inte får vara placerade bredvid varandra? (1p)

   (c) Vad blir svaret i (b) om kulorna som ligger längst till vänster och längst till höger måste ha olika färg? (1p)

4. Ange antalet heltalslösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 50$, då

   (a) $x_i \geq 1$, för $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. (1p)

   (b) $x_i \geq 0$, för $i = 1, 2, 3, 4, 5$ och $0 \leq x_6 < 48$. (1p)

   (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, och $x_i \geq 0$, för $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. (1p)

5. Låt X vara mängden av alla positiva delare till 4500. Definiera en relation $\mathcal{R}_1$ på X genom att sätta $x \, \mathcal{R}_1 \, y$ om x och y har lika många primtalsfaktorer. (T.ex. gäller att $4 \, \mathcal{R}_1 \, 6$ och $2 \, \mathcal{R}_1 \, 3$, men $2 \not\mathcal{R}_1 \, 4$.) Visa att $\mathcal{R}_1$ är en ekvivalensrelation och ange alla skilda ekvivalensklasser och antalet element i varje sådan klass. (3p)

6. Låt $A = \{1, 2\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ och definiera en graf G med hörnmängd A genom att låta hörnen (x, y) och (w, z) vara grannar om $x \neq w$, eller om $x = w$ och $y + z \leq 5$. Avgör hur lång den längsta cykeln i G är och bestäm även kromatiska polynomet för G. (3p)

7. Låt $\mathcal{F}_2$ vara mängden av alla booleska funktioner med 2 variabler. Definiera en relation $\mathcal{R}_2$ på $\mathcal{F}_2$ genom att sätta $f(x, y) \, \mathcal{R}_2 \, g(x, y)$ om $f(x, y) \leq g(x, y)$ gäller för alla olika värden på x och y. Visa att $\mathcal{R}_2$ är en partialordning och rita Hassediagrammet för $(F_2, \mathcal{R}_2)$. (3p)

Lycka till!

Lösningsskisser för tentamen 2024-01-02

1. (a) Vi söker heltalslösningar till ekvationen $462x + 54y = 6000$. Euklides algoritm ger att $\text{sgd}(462, 54) = 6$ och alltså kan ekvationen skrivas $77x + 9y = 1000$. Euklides algoritm ger nu att $1 = 2 \cdot 77 - 17 \cdot 9$ och en lösning är således $x = 2000$, $y = -17000$. Den allmänna lösningen är $x = 2000 + 9n$ och $y = -17000 - 77n$, där n är ett heltal. De positiva lösningarna är $(x, y) = (11, 17)$ och $(x, y) = (2, 94)$.

   (b) Det är inte sant. Ett motexempel är t.ex. en graf som består av två cykler med precis ett gemensamt hörn, och grafen som kan konstrueras från en cykel av längd fyra genom att lägga till exakt en kant mellan två hörn som inte är grannar, och sedan ytterligare ett hörn av gradtal 1 som har en kant till precis ett av hörnen på 4-cykeln.

2. Använd t.ex. induktion över n.

3. (a) Hon kan ordna kulorna på $\frac{10!}{5!3!2!}$ sätt.

   (b) De fem kulor som inte är gula kan permuteras på $\frac{5!}{3!2!}$ sätt och det finns sedan sex platser att placera de 5 gula kulorna på. Totalt får vi $\binom{6}{5}\frac{5!}{3!2!}$ möjligheter.

   (c) Vi räknar sätten att ordna kulorna på så att de som ligger längst till vänster och höger har samma färg, för att kunna subtrahera detta antal från svaret i (b).

   Kulorna som är placerade längst ut kan inte vara blå eller gröna, ty då skulle vi bryta mot kravet att 2 gula kulor inte får vara placerade bredvid varandra. Antalet sätt att ordna kulorna så att två gula kulor är placerade längst ut är $\binom{4}{3}\frac{5!}{3!2!}$.

   Alltså blir antalet möjligheter $\frac{5!}{3!}$.

4. (a) Ekvationen kan skrivas $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 44$, $y_i \geq 0$, och antalet lösningar blir alltså $\binom{49}{44}$.

   (b) Vi räknar bort de lösningar där $x_6 \geq 48$, och får $\binom{55}{50} - \binom{7}{2}$.

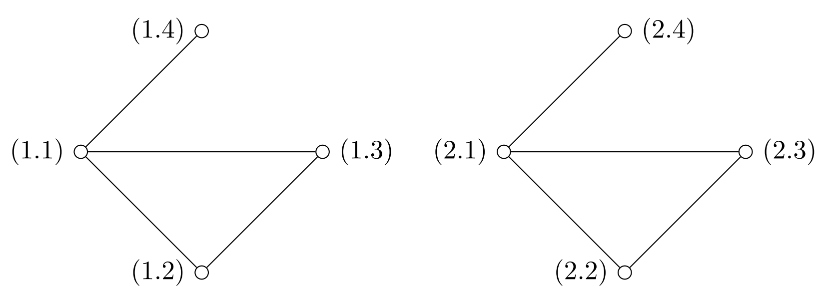
   (c) Antalet lösningar till $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, $x_i \geq 0$ är $\binom{22}{20}$, och antalet lösningar till $x_4 + x_5 + x_6 = 30$, $x_i \geq 0$ är $\binom{32}{30}$, så totala antalet lösningar är $\binom{22}{20} \cdot \binom{32}{30}$.

5. Relationen är uppenbart reflexiv, symmetrisk och transitiv och alltså en ekvivalensrelation.

   Primtalsfaktoriseringen av 4500 är $4500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Ekvivalensklasserna är alltså $[1], [2], [4], [12], [36], [180], [900], [4500]$, och

   $$|[1]| = 1, |[2]| = 3, |[4]| = 6, |[12]| = 8, |[36]| = 8, |[180]| = 6, |[900]| = 3, |[4500]| = 1.$$

6. Grafen G kan fås från följande graf genom att dessutom lägga till alla möjliga kanter mellan de två komponenterna.



Därmed fås att den längsta cykeln innehåller alla hörn i G, och alltså har längd 8. Det kromatiska polynomet för en triangel är $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ (via multiplikationsprincipen) och alltså får vi att det finns

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)$$

sätt att färga delgrafen bestående av de två nedre trianglarna i figuren och kanterna mellan dem.

Vi tillämpar rekursionsformeln $P(G,\lambda) = P(G-e,\lambda) - P(G\cdot e,\lambda)$ på grafen G och kanten e mellan hörnen $(2,4)$ och $(2,1)$. Då gäller att $P(G-e,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)(\lambda-4)^2$ och $P(G\cdot e,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)(\lambda-4)$.

Alltså får vi att

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)^2(\lambda-5)^2.$$

7. Att relationen $\mathcal{R}_2$ är reflexiv och transitiv är uppenbart. Antisymmetrin kan motiveras på följande sätt: om $f(x,y) \leq g(x,y)$ och $g(x,y) \leq f(x,y)$ för alla $x,y \in \{0,1\}$, så måste $f(x,y) = g(x,y)$ för alla $x,y \in \{0,1\}$.

   För Hassediagrammet, se lösningen till uppgift 14.5 i kursboken.