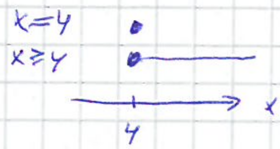
Förberedelse: Två symboler som används vid påståenden

1) Implikation, $\Longrightarrow$

$P \Rightarrow Q$ betyder att om $P$ är sant så är $Q$ sant



ex) $\underbrace{x = 4}_{P} \Longrightarrow \underbrace{x \geq 4}_{Q}$

P implicerar Q

P medför Q

Om P är sant så är Q sant

2) Ekvivalens, $\Longleftrightarrow$

$P \Leftrightarrow Q$ betyder $P \Rightarrow Q$ och $Q \Rightarrow P$

ex) $x^2 = 4 \Longleftrightarrow x = \pm 2$

Ekvationslösning: Via omskrivningar och förenklingar ska vi hitta alla lösningar till en ekvation.

ex 1) Lös ekv $\frac{3x-5}{2} = 5x$.

subtrahera $3x$ från båda led

$$\frac{3x-5}{2} = 5x \Longleftrightarrow 3x - 5 = 10x \Longleftrightarrow -5 = 7x \Longleftrightarrow$$

mult med 2 i båda led

dividera med 7 i båda led

$$\Longleftrightarrow x = -\frac{5}{7}$$

Kontroll: $x = -\frac{5}{7}$ ger $VL = \frac{3x-5}{2} = \frac{3\cdot(-\frac{5}{7}) - 5}{2} = \frac{-\frac{15}{7} - 5}{2} =$

$$= \frac{-\frac{15}{7} - \frac{35}{7}}{2} = \frac{-\frac{50}{7}}{2} = -\frac{50}{7\cdot 2} = -\frac{25}{7}$$

och $HL = 5\cdot(\frac{5}{7}) = -\frac{25}{7}$ dvs $VL = HL$. Svar: $x = -\frac{5}{7}$.

ex2) $a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Longleftrightarrow (a-b)(a+b) = 0 \Longleftrightarrow$

konjugatregeln

$\Longleftrightarrow a = b$ eller $a = -b$, dvs $a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = \pm b$

OBS: Om $a$ och $b$ har samma tecken, så är $a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = b$ !

Här har vi använt att $A \cdot B = 0 \Longleftrightarrow A = 0$ eller $B = 0$.

Andra användbara omskrivningar

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ kvadreringsreglerna

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ kubreglerna

Kontrollera

ex 3) Förenkla $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$.

mgn i T & N.

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{10} - \frac{2}{10}}{\frac{3}{12} + \frac{2}{12}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{12}} = \frac{3 \cdot 12}{10 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 5} = \frac{18}{25}.$$

ex 4) Lös ekv. $x^2 + 3x + 1 = 0$

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = 0 \iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

kvadrat-komplettering

$$\iff x + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \iff$$

$$\iff x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(alt: "pq-formeln", som härleds som ovan)

ex 5) Bestäm största värdet av $p(x) = x - 2x^2$.

$$p(x) = x - 2x^2 = -2\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) = -2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right)$$

kvadratkompl.

$$= \frac{1}{8} - 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{8} \text{ och } p\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}. \text{ Så}$$

största värdet är $\frac{1}{8}$ (då $x = \frac{1}{4}$)

**Def**: Om $a \geq 0$ så definieras $\sqrt{a}$ som det tal $x$ som uppfyller $x = \sqrt{a} \iff \begin{cases} x^2 = a \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Alltså är $\sqrt{a} \geq 0$ för alla $a \geq 0$

ex 6) $\sqrt{9} = 3$ och inget annat, ty $x = \sqrt{9} \iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x = \pm 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x = 3.$$

ex 7) Lös ekvationen $1 - x = \sqrt{7 - 3x}$

Observera först att $\sqrt{7-3x}$ bara är definierat

då $7-3x \geq 0$, dvs då $x \leq 7/3$.

Observera även att $1-x = \underbrace{\sqrt{7-3x}}_{\geq 0}$, så $1-x \geq 0$ dvs

$x \leq 1$

Således vet vi att $x \leq 1$ (båda villkoren uppfyllda)

Vi får $1-x = \sqrt{7-3x} \Rightarrow (1-x)^2 = 7-3x \Leftrightarrow$ ← ej ekvivalens vid kvadrering

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow x = -3$ eller $x = 2$. Ej ekvivalens, så vi MÅSTE kontrollera.

$x = 2$ uppfyller ej kravet $x \leq 1$, ej lösning

(alt: $x = 2$ ger $VL = 1-2 = -1$, $HL = \sqrt{7-6} = 1$ ← ej lika)

$x = -3$ ger $VL = 1+3 = 4$, $HL = \sqrt{7+9} = \sqrt{16} = 4$ ← lika

$\therefore$ $x = -3$ är enda lösningen

alt: Då $x \leq 1$ är $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ \sqrt{7-3x} \geq 0 \end{cases}$ så

$1-x = \sqrt{7-3x} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2 = 7-3x \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ el } x = 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -3$.

ex 8) $x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{x(x-1)(x+1)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 1$ eller $x = -1$

Vi har faktoriserat $x^3 - x$, dvs skrivit $x^3 - x$ som en produkt av polynom av lägre grad.

## Faktorisering av polynom

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, där

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ är konstanter och $a_n \neq 0$

kallas ett $n$:te gradspolynom.

Polynomdivision fungerar som division av heltal, t.ex med liggande stolen

ex 9) $\dfrac{x^3-x+1}{x-3}$ ⟵ Täljaren har minst samma gradtal som nämnaren.

$$
\begin{array}{rl}
\phantom{-(}x^2+3x+8 & \leftarrow \text{kvot} \\
\hline
x^3 \qquad -x+1 & \big|\ x-3 \\
-(x^3-3x^2) & \\
\hline
3x^2-x+1 & \\
-(3x^2-9x) & \\
\hline
8x+1 & \\
-(8x-24) & \\
\hline
25 & \leftarrow \text{lägre gradtal än nämnaren} \\
 & \leftarrow \text{rest.}
\end{array}
$$

Alltså är $\dfrac{x^3-x+1}{x-3} = x^2+3x+8+\dfrac{25}{x-3}$

Kontrollera genom att sätta HL på gemensam nämnare. I exemplet kan vi skriva sambandet som

$$x^3-x+1 = (x^2+3x+8)(x-3)+25$$

Allmänt: $\underbrace{p(x)}_{\text{grad } n} = \underbrace{q(x)}_{\substack{\text{grad } n-1,\\ \text{kvot vid}\\ \text{division}\\ \text{med } x-\alpha}}\cdot(x-\alpha) + \underbrace{r}_{\substack{\text{rest, vid division}\\ \text{med } x-\alpha}}$

Av detta följer att $p(\alpha)=r$, så $p(\alpha)=0 \iff r=0$. Vi har därmed

<u>Faktorsatsen</u>: Polynomet $p(x)$ är delbart med $x-\alpha$ omm $x=\alpha$ är en lösning till $p(x)=0$.

ex 10) Faktorisera $p(x)=5x^2-2x^3-x-2$ så långt som möjligt i reella faktorer.

Försök hitta något nollställe till $p(x)$.

Prövning ger att $p(1)=0$, så $p(x)$ är delbart med $x-1$

Polynomdivision (övning) ger

$$p(x) = 5x^2-2x^3-x-2 = (x-1)(-2x^2+3x+2) =$$
$$= -2(x-1)\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right) = -2(x-1)\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right) =$$
$$= -2(x-1)\left(x-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right) = \underbrace{-2(x-1)(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{\text{faktoriserat, kontrollera.}}$$

ex 10) Lös olikheten $\dfrac{4}{x+1} \leq x-2$ .

Lösningsgång: Flytta över allt till en sida, gör liknämnigt och faktorisera, så vi får jämföra med 0 .

$$\frac{4}{x+1} \leq x-2 \iff \frac{4}{x+1}-(x-2) \leq 0 \iff \frac{4-(x+1)(x-2)}{x+1} \leq 0$$

$$\iff \frac{6+x-x^2}{x+1} \leq 0 \iff \frac{x^2-x-6}{x+1} \geq 0 \iff \frac{(x-3)(x+2)}{x+1} \geq 0$$

mult med (−1)

faktorisera, övning!

Gör en teckentabell med alla faktorer och nollställen (i ordning)

| $x$ | | $-2$ | | $-1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x+1}$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ |

← Här ser vi att $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x+1} \geq 0$ precis då $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 3$

Kontrollera

Svar: $\dfrac{4}{x+2} \leq x-2$ då $\begin{cases} -2 \leq x < -1 \\ \text{eller} \\ x \geq 3 \end{cases}$

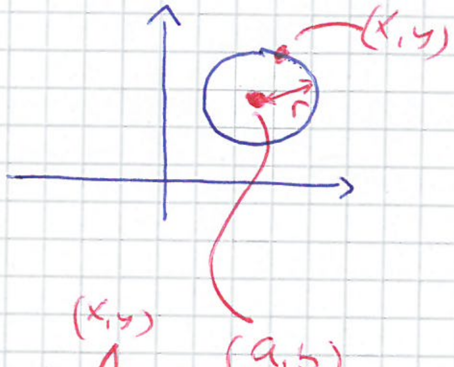
Varning: Multiplicera INTE med icke-konstanta uttryck i olikheter, om du inte vet deras tecken!

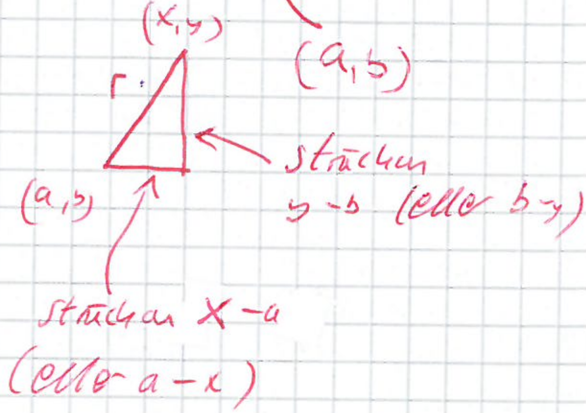
# Cirkelns ekvation

En cirkel med radie r kring punkten (a,b) består av alla punkter (x,y) som har avståndet r till (a,b). Pythagoras sats ger att

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

vilket är cirkelns ekvation




ex) $x^2+y^2-2x+4y=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=5=(\sqrt{5})^2$ är således

ekvationen för en cirkel kring $(1,-2)$ med radie $\sqrt{5}$