Absolutbelopp

För reella tal x definieras $|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$

ex 1) $|\underbrace{3}_{\geq 0}| = 3$, $|\underbrace{-7}_{\leq 0}| = -(-7) = 7$

Därmed blir $|x| \geq 0$ för alla reella x.

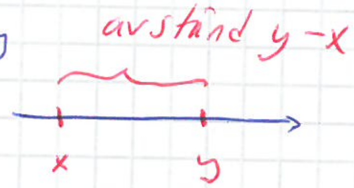
OBS: $\sqrt{x^2} = y \iff \begin{cases} x^2 = y^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \text{ eller } y = -x \\ y \geq 0 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} y = x & \text{om } x \geq 0 \\ y = -x & \text{om } x \leq 0 \end{cases} \iff y = |x|$, dvs $\sqrt{x^2} = |x|$!

Ur definitionen fås att $|x-y| = \begin{cases} x-y, & \text{om } x-y \geq 0 \text{ dvs om } x \geq y \\ -(x-y) = y-x, & \text{om } x \leq y \end{cases}$

$x \geq y$:

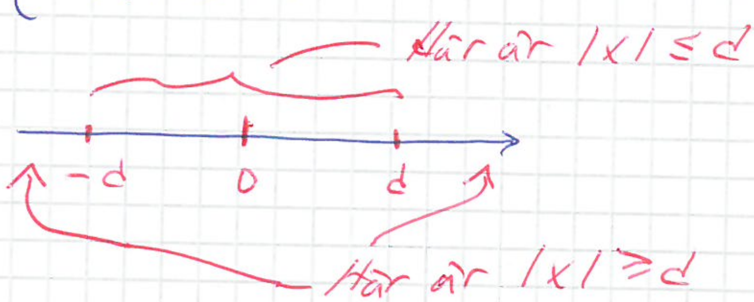
$x \leq y$



dvs $|x-y|$ kan tolkas som avståndet mellan x och y på tallinjen.

$|x| = |x-0|$ = avståndet mellan x och 0.

OBS: Om $d \geq 0$ så är $\begin{cases} |x| = d \iff x = \pm d \\ |x| \leq d \iff -d \leq x \leq d \\ |x| \geq d \iff x \geq d \text{ eller } x \leq -d \end{cases}$



ex2) Lös ekvationen

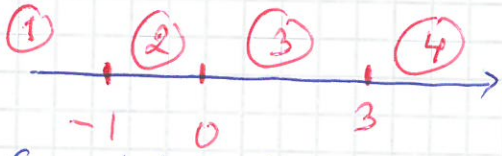
$$|3-x| - 2|x+1| = |x|.$$

Vi gör falluppdelning ②

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x \leq 0 \end{cases}, \quad |x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{om } x \geq -1 \\ -(x+1), & \text{om } x \leq -1 \end{cases},$$

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{om } 3-x \geq 0 \text{ dvs } x \leq 3 \\ -(3-x), & \text{om } 3-x \leq 0 \text{ dvs } x \geq 3 \end{cases}$$

Brytpunkterna (0, −1 och 3) ritas in på tallinjen



och vi får tallinjen delad i fyra intervall

① $x \leq -1$: Vi får $|3-x| - 2|x+1| = |x| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - x - 2\cdot(-(x+1)) = -x \Leftrightarrow 5 + x = -x \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$, och $-\frac{5}{2} \leq -1$, så i intervallet

$x \leq -1$ finns endast lösningen $x = -\frac{5}{2}$

② $-1 \leq x \leq 0$: Vi får $|3-x| - 2|x+1| = |x| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - x - 2(x+1) = -x \Leftrightarrow 1 - 3x = -x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$,

men $\frac{1}{2} \notin [-1, 0]$, så det finns ingen lösning i $[-1, 0]$

③ $0 \leq x \leq 3$: Vi får $|3-x| - 2|x+1| = |x| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - x - 2(x+1) = x \Leftrightarrow 1 - 3x = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$, och

$\frac{1}{4} \in [0, 3]$ så i $[0, 3]$ finns bara lösningen $x = \frac{1}{4}$

④ $x \geq 3$: Vi får $|3-x| - 2|x+1| = |x| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(3-x) - 2(x+1) = x \Leftrightarrow -x - 5 = x \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$,

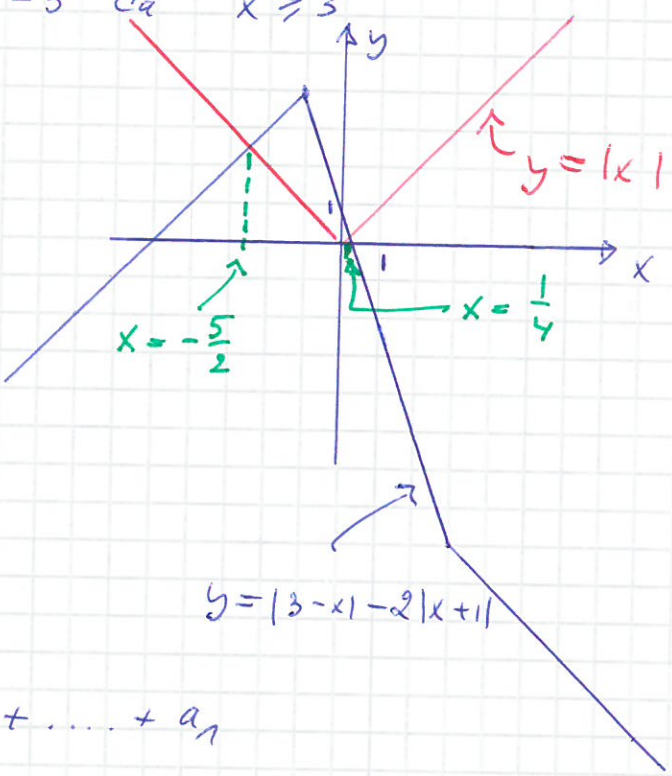
men $-\frac{5}{2} \notin [3, \infty[$ så det finns ingen lösning $x \geq 3$.

Svar: $x = -\frac{5}{2}$ eller $x = \frac{1}{4}$

Likheten kan även illustreras genom att rita graferna till VL och HL

$$VL = |3-x| - 2|x+1| = \begin{cases} x+5 & \text{då } x \le -1 \\ 1-3x & \text{då } -1 \le x \le 3 \\ -x-5 & \text{då } x \geq 3 \end{cases}$$

$$HL = |x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0 \\ -x & \text{då } x \le 0 \end{cases}$$



Figuren stödjer det resultat som kalkylen gav.

Summor

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ betyder $a_1 + a_2 + \dots + a_n$

ex 3) $\sum_{k=2}^{4}(k^2+k) = (2^2+2) + (3^2+3) + (4^2+4) = 38$

OBS: Summationsindex, k, finns ej med i den uträknade summan!

Exempelvis är $\sum_{k=2}^{4}(k^2+k) = \sum_{j=2}^{4}(j^2+j)$

Vi tittar på två speciella summor

1. Aritmetisk summa, konstant skillnad mellan termerna.

IDÉ
- Skriv summan i omvänd ordning
- adder

ex 4) $S = 1+3+5+7+9 = \sum_{k=1}^{5}(2k-1) = \sum_{k=0}^{4}(2k+1)$

$S = 9+7+5+3+1$

$2S = (1+9)+(3+7)+(5+5)+(7+3)+(9+1) =$

$= 5\cdot(1+9)$

Så $S = 5 \cdot \frac{1+9}{2} = 25$

Allmänt för aritmetisk summa:

$$S = \text{antal termer} \cdot \frac{\text{första} + \text{sista}}{2}$$

ex 5) $\sum_{k=3}^{100} (1-2k) = \underbrace{-5-7-9-\ldots-199}_{\text{aritmetisk}} =$

$= \big/ \text{antal termer} = 100-3+1 = 98 \big/ =$

$= 98 \cdot \frac{-5+(-199)}{2} = 9996.$

② Geometrisk summa, konstant "kvot"

ex 6) $S = 3-6+12-24+48 = \sum_{k=0}^{4} 3\cdot(-2)^k$

IDÉ
- mult med kvot
- subtrahera

$-2S = -6+12-24+48-96$

$S-(-2S) = 3-(-96) = 3-3\cdot(-2)^5$

så $S(1-(-2)) = 3\cdot(1-(-2)^5)$ dvs

$S = 3\cdot\frac{1-(-2)^5}{1-(-2)} = \text{första term}\cdot\frac{1-\text{kvot}^{\text{antal}}}{1-\text{kvot}}$

Allmänt för geometrisk summa:

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \sum_{j=0}^{n} a\cdot q^j =$$

$$= \begin{cases} a\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{om } q \neq 1 \\ a(n+1) & \text{om } q = 1 \end{cases}$$

OBS: De flesta summor är varken A eller G!

TIPS: Skriv ut termerna, för att få bättre uppfattning om hur summan ser ut.

Fakultet

ex 7) 3 element kan ordnas på $3 \cdot 2 \cdot 1$ sätt

5 — " — $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sätt

Def

Allmänt: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ då n är heltal > 0.

$n!$ anger antal sätt att ordna n element.

OBS: $5! = 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4!} = 5 \cdot 4!$ och allmännare

så är $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ då $n = 1, 2, \ldots$ (*)

Vi definierar även $0! = 1$, så att (*) gäller även då $n = 0$.

Binomialkoefficienter

ex 8) Om vi bland 8 löpare vill välja 3 medaljörer (guld, silver, brons) så kan dessa väljas på $8 \cdot 7 \cdot 6$ sätt, om vi bryr oss om ordningen.

Bryr vi oss <u>inte</u> om ordningen, så blir antal möjliga medaljörer $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}}$

antal sätt att ordna 3 personer

Def $\binom{n}{k}$, "n över k" definieras som

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \quad \text{då } n = 0, 1, \ldots$$

och $k = 1, 2, \ldots, n$

$\binom{n}{k}$ anger antal sätt att välja k element bland n stycken, utan hänsyn till ordning

Def $\binom{n}{0} = 1$.

ex 9) Antal möjliga lottorader (välj 7 nummer av 35)

är $\binom{35}{7} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 6'724'520$

<u>OBS</u>: $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8!}{3!(8-3)!}$

och allmänt är $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

<u>OBS</u>: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, övning.

ex 10) $\binom{1000}{998} = \binom{1000}{2} = \frac{1000 \cdot 999}{1 \cdot 2} = 499'500$

Binomialkoefficienterna uppfyller sambandet

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{då} \quad \begin{array}{l} n = 2, 3, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{array}$$

(övning), så de kan enkelt arrangeras i Pascals triangel

```
            1            ← rad 0
          1   1
        1   2   1        ← 3 = 2 + 1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1    ← rad 4     här står (4 0) (4 1) (4 2) (4 3) (4 4)
  1   5  10  10   5   1  ← rad 5
  ↑       ↑
kol 0   kol 3            (5 3) = 10
```

Här står $\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$; $\binom{5}{3} = 10$

<u>Binomialsatsen</u> Om $n \geq 1$, så är

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

ex 11) $(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = \Big/ \text{rad } 4 \Big/ =$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^2 = \Big/ \text{rad } 2 \Big/ = a^2 + 2ab + b^2$

Bevisidé (Binomialsatsen)

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b) = A_0 a^n + A_1 a^{n-1}b + \ldots + \underbrace{A_k a^{n-k}b^k} + \ldots + A_n b^n$$

Hur många termer $a^{n-k}\cdot b^k$ får vi vid multiplikationen?

Vi ska välja ut b ur k av de n st. parenteserna, vilket kan göras på $\binom{n}{k}$ sätt, så $A_k = \binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

ex) $$\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (x^2)^{3-k} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^k =$$

$a = x^2$ $\quad$ $b = -\frac{1}{2x}$

$$= \binom{3}{0} x^6 + \binom{3}{1} x^4 \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) + \binom{3}{2} x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + \binom{3}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^3 =$$

$$= x^6 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^3}$$