TATA68, Fö 3 2017 (1)

Komplexa tal

Vi inför det *imaginära talet* i som uppfyller villkoret $i^2=-1$. Därefter inför vi de *komplexa talen* $z=a+bi$, där a och b är reella, med samma räknelagar som för de reella talen samt med villkoret $i^2=-1$.

ex 1) $(1+i)(2-3i) = 2-3i+2i-3\underbrace{i^2}_{-1} = 5-i$

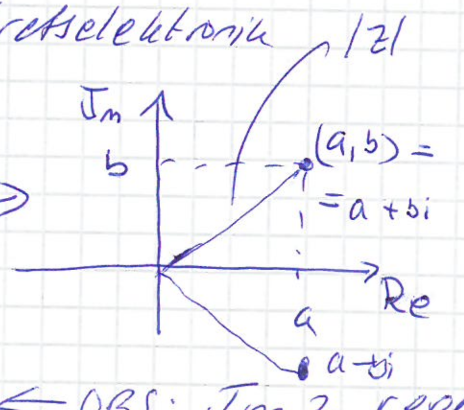
Vi kommer bland annat att använda komplexa tal för att

* faktorisera polynom
* göra trigonometriska omskrivningar
* beräkna integraler
* lösa differentialekvationer

} envariabel analys

Tillämpningar finns bl. a. i fysik och kretselektronik

Komplexa talplanet



Om $z=a+bi$, så definieras

$\mathrm{Re}\, z = a$ (realdelen)

$\mathrm{Im}\, z = b$ (imaginärdelen) ← OBS: Im z reell.

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ (belopp) avstånd till $(0,0)=0$

$\bar{z} = a-bi$ (konjugat)

OBS: $|z|^2 = z\bar{z}$ (övning, sätt $z=a+bi$)

OBS: $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$ (övning)

OBS: $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$ (övning)

Talen $z=a+bi$ och $w=c+di$ (a,b,c,d reella) är *lika* omm $\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

ex 2) För vilka z är $2z-(1+i)\overline{z}=3$?

Låt $z=a+bi$, där a och $b \in \mathbb{R}$.

Då fås $2z-(1+i)\overline{z}=2(a+bi)-(1+i)(a-bi)=$

$= /\text{räkna}/ = a-b+(3b-a)i \underbrace{=}_{\text{ska bli}} 3$

Identifiera Re & Im:

$$\begin{cases} \text{Re}: & a-b=3 \\ \text{Im}: & 3b-a=0 \end{cases} \quad \text{som ger} \quad \begin{array}{l} a=9/2 \\ b=3/2 \end{array}$$

dvs $z=a+bi=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}i$ Kontrollera via direkt insättning!

Division $\frac{z}{w} \overset{\text{def}}{=} \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}$ ($w\overline{w}$ är reellt?)

ex 3) $\frac{2-i}{1+3i} = \frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2-6i-i-3}{10} =$

$= \frac{-1-7i}{10} = -\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i$

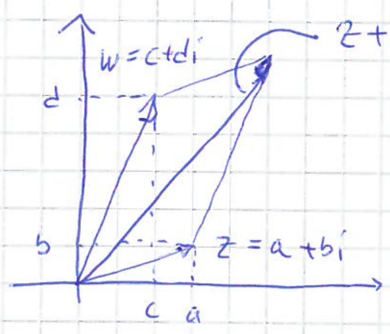
$$\text{Re}\left(\frac{2-i}{1+3i}\right) = -\frac{1}{10}, \quad \text{Im}\left(\frac{2-i}{1+3i}\right) = -\frac{7}{10}$$

OBS: $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

Addition av komplexa tal fungerar som vektoraddition

Av detta följer triangelolikheten:

Om z och w är komplexa tal så är $|z+w| \leq |z|+|w|$



ex 3) Om $|z-3i| \leq 7$, så är

$|z+4| = |z-3i+4+3i| \leq \underbrace{|z-3i|}_{\leq 7} + \underbrace{|4+3i|}_{5} \leq 7+5=12$

ex 4) Lös ekvationen $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$.

$$z^2 - 3iz - 3 + i = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{3}{2}i\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{3}{2}i\right)^2}_{-\frac{9}{4}} - 3 + i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{3i}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} + i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{3i}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - i.$$ Låt $z - \frac{3i}{2} = w$, så fås

$w^2 = \frac{3}{4} - i$, sätt därefter $w = a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$

Då fås $(a+bi)^2 = \frac{3}{4} - i \Longleftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = \frac{3}{4} - i$

Re: $a^2 - b^2 = \frac{3}{4}$

Im: $2ab = -1$

Abs: $a^2 + b^2 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{5}{4}$

Re + Abs ger $2a^2 = 2$, dvs $a = \pm 1$. Insatt i Im

ger detta: $a = 1$ ger $b = -\frac{1}{2a} = -\frac{1}{2}$

$a = -1$ ger $b = \frac{1}{2}$

Alltså är $w = a + bi = \begin{cases} 1 - \frac{i}{2} \\ \text{eller} \\ -1 + \frac{i}{2} \end{cases}$

och $z - \frac{3i}{2} = w$, dvs $z = w + \frac{3i}{2}$, så

$$z = \begin{cases} 1 - \frac{i}{2} + \frac{3i}{2} \\ \text{eller} \\ -1 + \frac{i}{2} + \frac{3i}{2} \end{cases} \quad \text{dvs} \quad z = \begin{cases} 1 + i \\ \text{eller} \\ -1 + 2i \end{cases}$$

Kontroll: Sambandet mellan rötter & koefficienter:

$(1+i)(-1+2i) = -3 + i$ Stämmer

$(1+i) + (-1+2i) = 3i = -(-3i)$ Stämmer

Polynomekvationer, fortsättning

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 ,$$

där $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ är konstanter och $a_n \neq 0$
är ett allmänt n:te-gradspolynom

Faktorsatsen (repris)

$z = \alpha$ är ett nollställe till $P(z) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (z-\alpha)$ är en faktor i $P(z)$

Algebrans fundamentalsats

Varje polynomekvation $P(z)=0$, av grad$(P) \geq 1$,
har minst en rot (reell eller komplex)

Beviset ligger ej inom kursens ram.

Kombinerar vi dessa båda satser, så fås att
Varje n:te-gradsekvation har exakt n stycken rötter,
om man räknar rötterna med deras multiplicitet.

ex 5)

$$\underbrace{7(z-1)(z+i)^3}_{P(z),\ 4\text{:e-gradspolynom}} = 0$$

Ekvationen har 4 rötter, nämligen

$z = 1$, enkelrot (multiplicitet 1)

$z = -i$, trippelrot (multiplicitet 3)

Några egenskaper hos nollställen/faktorer

Sats: Om $P(z)$ har reella koefficienter och
om $\alpha = a + bi$ är ett nollställe till P (a, b reella)
så är $\bar{\alpha} = a - bi$ ett nollställe till P.

Bevisskiss:

$$P(\bar{\alpha}) = a_n(\bar{\alpha})^n + a_{n-1}\cdot(\bar{\alpha})^{n-1} + \dots + a_1\bar{\alpha} + a_0 =$$

$$= \Big/ \begin{array}{l}\text{räknelagar,}\\ \text{övning}\end{array} \Big/ = \overline{a_n\cdot\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0} =$$

$$= \overline{P(\alpha)} = \bar{0} = 0.$$

och i beviset används att $a_0, a_1, \dots, a_n$ är reella!

<u>Sats</u> Om $P(z)$ har <u>heltalskoefficienter</u>, och om $\alpha = \frac{p}{q}$ är en rationell rot (där p och q är heltal utan gemensamma faktorer) så är p en faktor i a_0 och q en faktor i a_n.

Bevis: övning för intresserade.

ex6) Lös $2z^3 - 3z^2 + 2z = 3 \iff 2z^3 - 3z^2 + 2z - 3 = 0$

$P(z) = 2z^3 - 3z^2 + 2z - 3$ har heltalskoefficienter.

Kandidater till nollställen till $P(z)$ är $\frac{p}{q}$, där

* p är faktor i -3, dvs möjliga p är $\pm 1, \pm 3$
* q är faktor i 2, dvs möjliga q är $\pm 1, \pm 2$

Så möjliga $\frac{p}{q}$ är $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$.

Prövning (övning) visar att $z = \frac{3}{2}$ är ett nollställe.

Polynomdivision ger sedan att

$$P(z) = \left(z - \tfrac{3}{2}\right)(2z^2 + 2) = 2\left(z - \tfrac{3}{2}\right)(z^2 + 1) =$$

$$= 2\left(z - \tfrac{3}{2}\right)(z^2 - i^2) = 2\left(z - \tfrac{3}{2}\right)(z - i)(z + i)$$

Så lösningarna till ekvationen är $z = \frac{3}{2}$, $z = \pm i$

Notera att

* Ekvationen fick tre lösningar (tredjegradsekvation)
* De komplexa lösningarna, $\pm i$, är varandras konjugat (ekvationen har reella koefficienter)

ex 7) $P(z) = 2z^3 - 5z^2 + 22z - 10$ har ett nollställe med realdel 1. Faktorisera $P(z)$.

L: $z = 1$ är inte ett nollställe, ty $P(1) = 17 \neq 0$.
Alltså är $z = 1 + ai$ ett nollst. för något $a \neq 0$.
Därmed är även $\bar{z} = 1 - ai$ ett nollst., ty P har reella koefficienter. $P(z)$ innehåller därmed faktorerna $(z-(1+ai))\cdot(z-(1-ai)) =$
$= ((z-1)-ai)((z-1)+ai) = (z-1)^2 + a^2 =$
$= z^2 - 2z + 1 + a^2$. Polynomdivision ger

$$
\begin{array}{l}
\quad 2z - 1 \\
\hline
2z^3 - 5z^2 + 22z - 10 \;\big|\; z^2 - 2z + 1 + a^2 \\
-(2z^3 - 4z^2 + (2+2a^2)z) \\
\hline
\quad -z^2 + (20 - 2a^2)z - 10 \\
\quad -(-z^2 + 2z - 1 - a^2) \\
\hline
\quad (18 - 2a^2)z - 9 + a^2
\end{array}
$$

rest, ska vara 0 för alla z.

$$
\begin{cases} z^1: & 18 - 2a^2 = 0 \\ z^0: & a^2 - 9 = 0 \end{cases}
$$
som ger $a = \pm 3$

dvs $z = 1 \pm 3i$ är nollställen. Därmed fås (enligt ovan)

$P(z) = (z-(1+3i))(z-(1-3i))\cdot(2z-1) =$
$= (2z-1)(z-1-3i)(z-1+3i)$

Kontrollera!