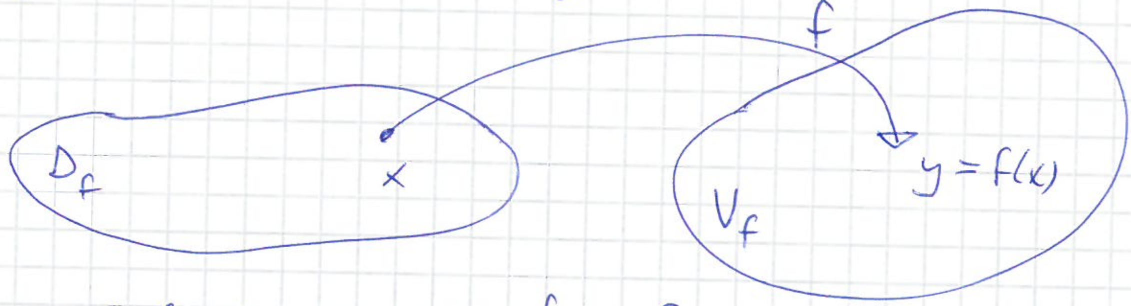
Funktionsbegreppet.

En <u>funktion</u> f är en regel som till varje x i en given mängd (D_f) tillordnar ett tal y via sambandet $y = f(x)$



D_f = definitionsmängden för f

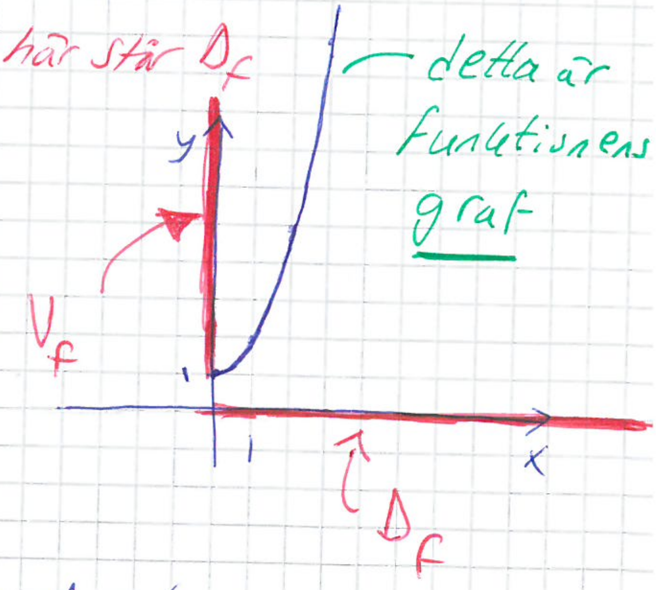
V_f = värdemängden för f

Vi skriver $f : x \longrightarrow f(x)$ eller $y = f(x)$

ex 1) $f(x) = x^2 + 1, \ x \geq 0.$ här står D_f

$D_f = [0, \infty[$

$V_f = [1, \infty[$



ex 2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Om inget annat sägs, så är D_f den <u>naturliga</u> definitionsmängden, dvs de x för vilka $\sqrt{1-x^2}$ är meningsfullt.

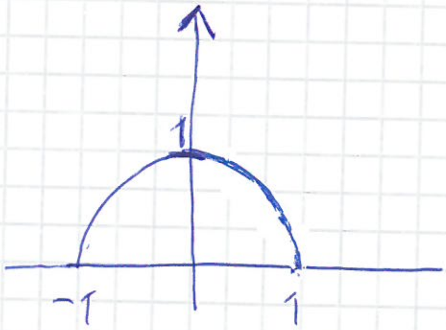
$\sqrt{1-x^2}$ är definierat då $1-x^2 \geq 0$,
dvs då $-1 \leq x \leq 1$, så $D_f = [-1, 1]$.

I detta fall kan vi få en bättre uppfattning om grafens utseende via omskrivningar:

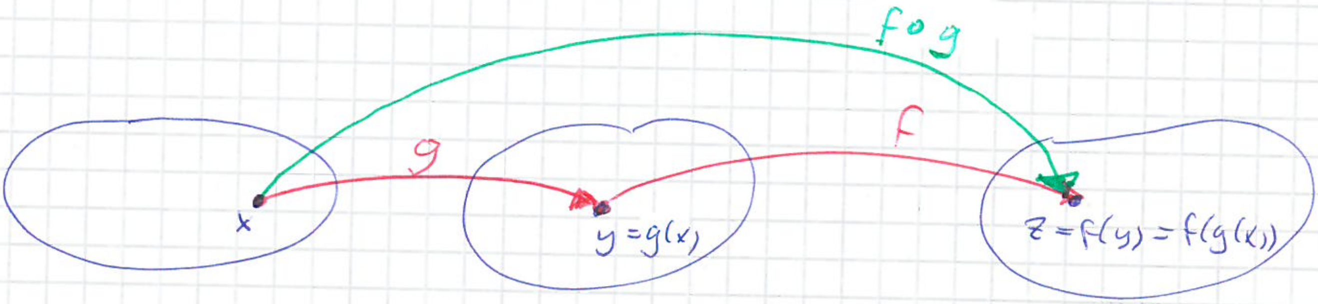
$$y = \sqrt{1-x^2} \iff \begin{cases} y^2 = 1-x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

vilket beskriver övre halvan av enhetscirkeln

$D_f = [-1, 1]$, $V_f = [0, 1]$



Med $f \circ g\,(x)$ menas den sammansatta funktionen $h(x) = f(g(x))$



OBS: $f \circ g\,(x)$ och $g \circ f\,(x)$ är vanligen ej lika

ex 3) $g(x) = 1-x^2$ och $f(x) = \sqrt{x}$ ger

$$f(g(x)) = f(1-x^2) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 1-(\sqrt{x})^2 = 1-x, \quad x \geq 0$$

kräver $x \geq 0$

"Att först ta på sig en tröja och därefter en jacka ger inte samma resultat som att först ta på sig en jacka och sedan en tröja"

Def Funktionen f är <u>injektiv</u> (inverterbar, har invers) om det till varje $y \in V_f$ finns <u>exakt ett</u> $x \in D_f$ så att $f(x) = y$.

dvs att om $x_1 \neq x_2$ så blir $f(x_1) \neq f(x_2)$

ex 4) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$, $x \neq 2$

$$y = \frac{1}{2-x} \iff (2-x)y = 1 \iff 2y - xy = 1 \iff$$

$$\iff xy = 2y - 1 \iff x = \frac{2y-1}{y} \quad \underbrace{(y \neq 0)}_{V_f}$$

dvs varje $y \in V_f$ ger exakt ett $x \in D_f$ där $f(x) = y$, så f är injektiv

ex 5) $f(x) = 1 + x^2$.

$$y = 1 + x^2 \iff x^2 = y - 1 \iff x = \pm\sqrt{y-1} \quad (y \geq 1)$$

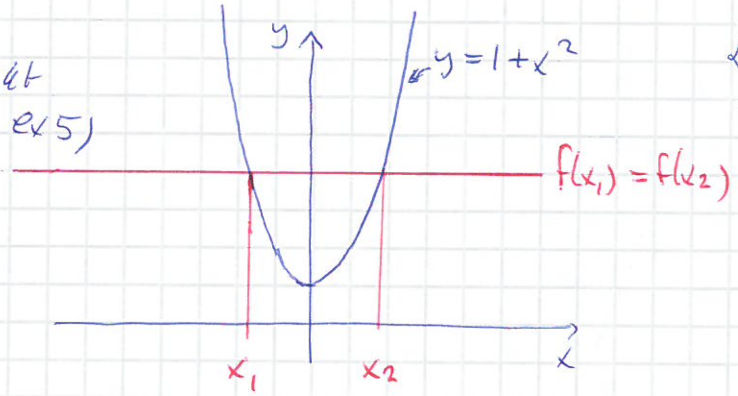
Här ser vi att vissa y-värden ger flera x.
Exempelvis ger $y = 2$ att $x = \pm 1$, dvs $f(1) = f(-1) = 2$.
Således är f <u>inte</u> injektiv

ex 6) $f(x) = 1 + x^2$, $x \leq 0$ är däremot injektiv, ty

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{y-1} \\ x \leq 0 \end{cases} \iff x = -\sqrt{y-1}$$

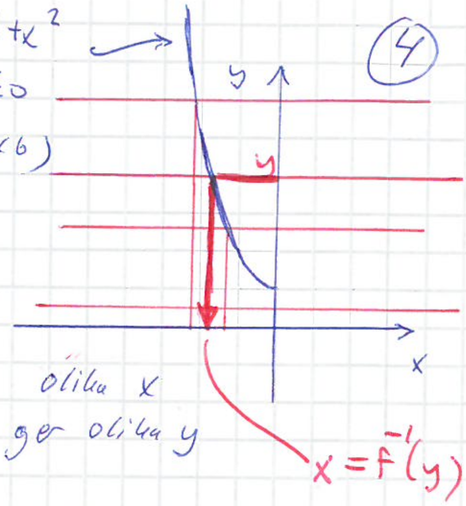
Grafiskt

ex 5)



$\begin{cases} y = 1 + x^2 \\ x \leq 0 \end{cases}$

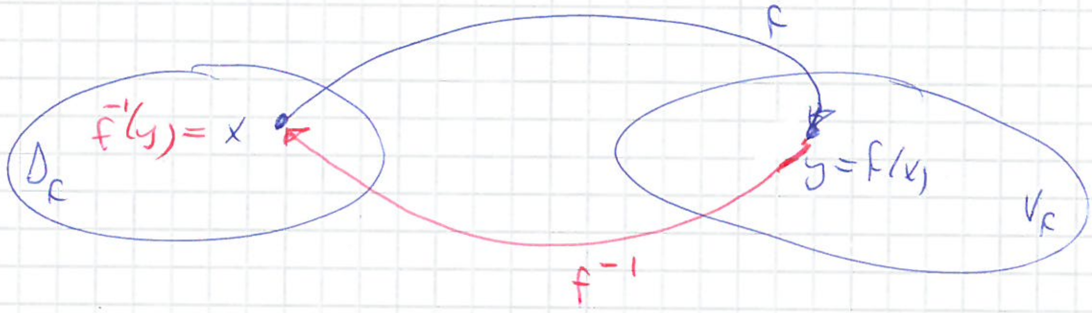
ex 6)



Grafiskt innebär det att f har invers bara om varje horisontell linje skär funktionens graf __högst en gång__

ex 7) $f(x) = x^3 - x$ saknar invers, ty t.ex är $f(0) = f(1)$, dvs det finns två olika x som ger samma $f(x)$.

Om $f(x)$ är injektiv, dvs $y = f(x)$ har exakt en lösning för varje $y \in V_f$, så skriver vi $x = f^{-1}(y)$



f^{-1} "ogör" det som f gör

Notera att om f är injektiv så gäller

- $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
- $D_f = V_{f^{-1}}$, $V_f = D_{f^{-1}}$
- $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in D_f$
- $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in V_f$

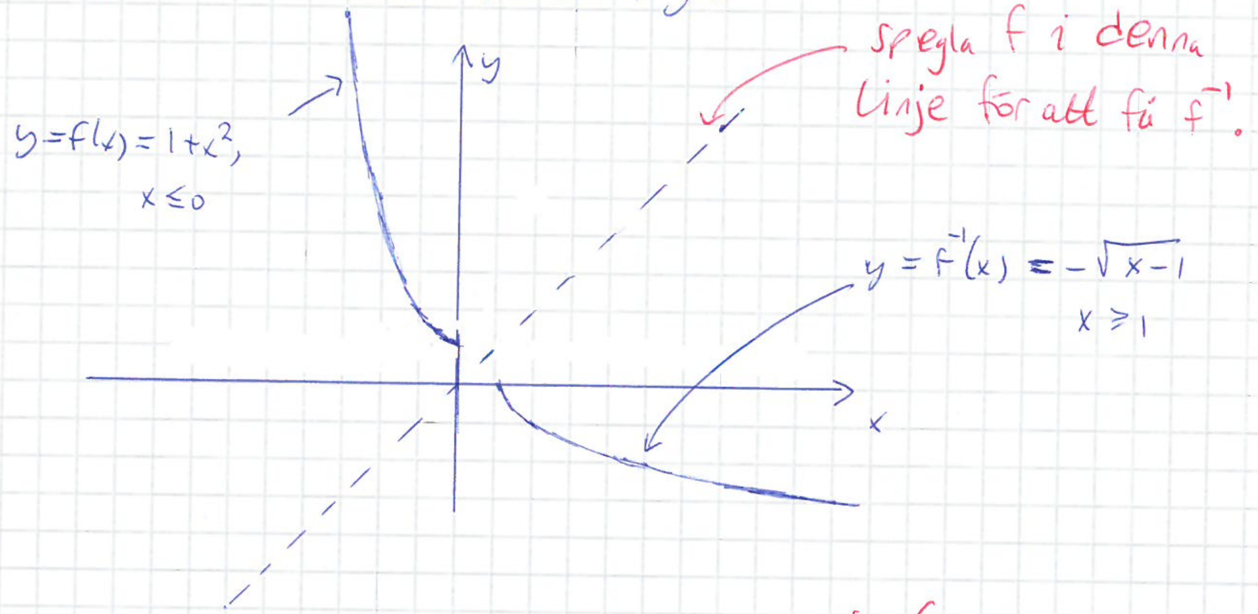
ex 6 igen) $f(x) = x^2 + 1$, $x \leq 0$ ger

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \iff x = -\sqrt{y-1} = f^{-1}(y)$$

Så $f^{-1}(y) = -\sqrt{y-1}$.

Med annat variabelnamn, byt y mot x, fås
$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$$

Då kan f och f^{-1} ritas i samma figur



ex 4) igen $f(x) = \frac{1}{2-x}$. $\quad y = \frac{1}{2-x} \underset{\text{som förr}}{\Longleftrightarrow} x = \frac{2y-1}{y} = f^{-1}(y)$,

Så $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x}$.

<u>Def</u> f är <u>växande</u> om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \ge f(x_1)$ för alla x_1 och x_2 i D_f.

f är <u>avtagande</u> om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$ för.....

f är <u>strängt växande</u> om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ för.....

f är <u>strängt avtagande</u> om $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ för....

f är <u>monoton</u> om f är växande eller om f är avtagande motsvarande med strängt monoton.

ex 8) $f(x) = x^3$ är strängt växande, ty om $x_2 > x_1$ så är
$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) =$$

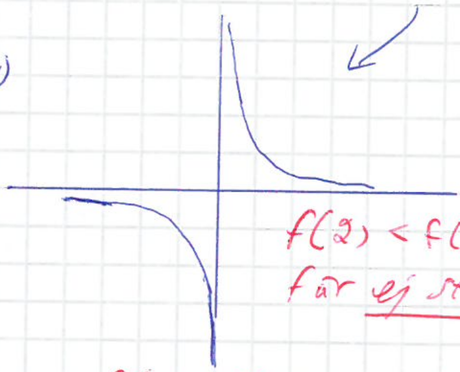
$$= \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \Big(\underbrace{\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} x_1^2}_{\substack{\geq 0 \text{ och} \\ = 0 \text{ bara om } x_1 = x_2 = 0}} \Big) > 0, \text{ dvs } f(x_2) > f(x_1).$$

OBS: Om f är strängt monoton så har f invers.

OBS: Omvändningen är inte sann. f kan ha invers även om inte f är strängt monoton, t.ex $f(x) = \frac{1}{x}$

$y = f(x) = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{y} = f^{-1}(y)$

dvs $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, f har invers men f är ej strängt monoton.

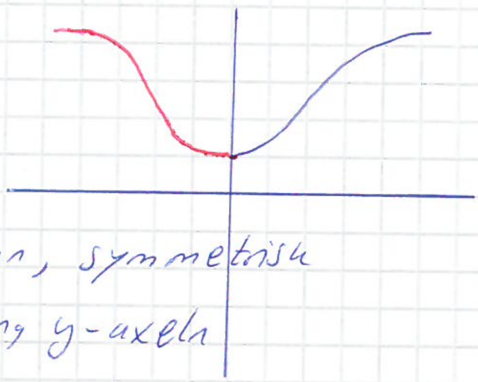


$f(2) < f(1)$ så f är ej strängt växande

$f(1) > f(-1)$ så f är ej strängt avtagande.

Def f är jämn om $f(-x) = f(x)$ för alla x i D_f
(t.ex $f(x) = 1 + x^2$, $x^4 - x^2$, $\frac{1}{x^6}$)

f är udda om $f(-x) = -f(x)$ för alla x i D_f
(t.ex $f(x) = x$, x^3, $\frac{1}{x^7}$)



jämn, symmetrisk kring y-axeln

udda, rita för $x \geq 0$, vrid ett halvt varv för att få grafen då $x \leq 0$.

OBS
jämn · jämn = jämn
jämn · udda = udda
udda · udda = jämn