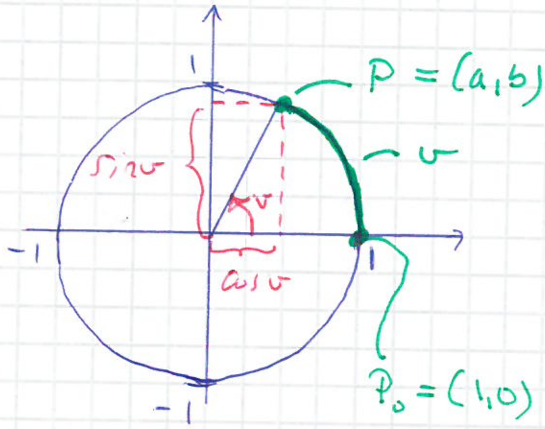
Trigonometri

Vi utgår från enhetscirkeln



Vinkeln v definieras som längden av bågen från P_0 till P i positiv led (moturs)

Ett varv motsvarar vinkeln 2π (cirkelns omkrets)

Vi definierar (med beteckningar i figuren)

$$\cos v = a$$

$$\sin v = b$$

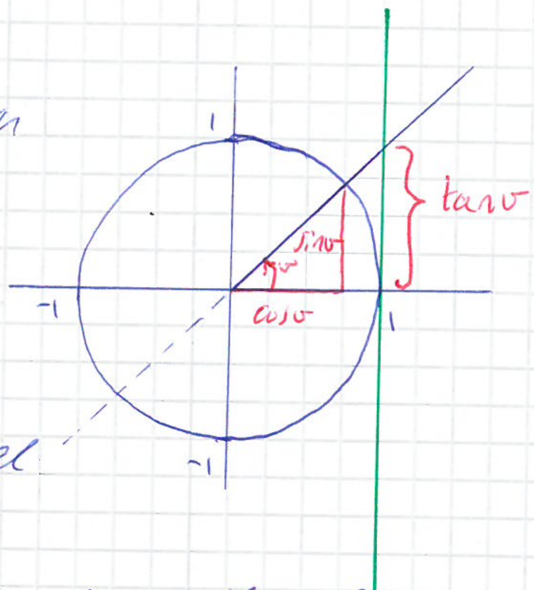
$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{b}{a} \quad \text{om} \quad v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (a \neq 0)$$

$$\cot v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{a}{b} \quad \text{om} \quad v \neq n\pi \quad (b \neq 0)$$

OBS: n står för heltal

OBS

Likformiga trianglar visar att vi kan se tan v som y-koordinaten för strålens skärning med linjen $x = 1$.



Ur enhetscirkeln ser vi en del enkla samband.

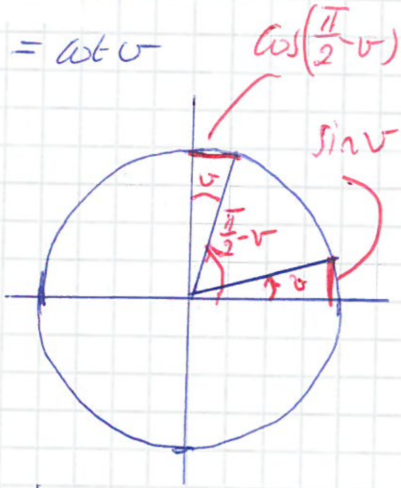
1) $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ (trigonometriska ettan, Pythagoras sats)

2) $\sin(v + n2\pi) = \sin v$

$\cos(v + n2\pi) = \cos v$

3) $\sin(v+\pi) = -\sin v$ $\quad$ $\tan(v+\pi) = \tan v$

$\cos(v+\pi) = -\cos v$ $\quad$ $\cot(v+\pi) = \cot v$



4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-v\right) = \cos v$

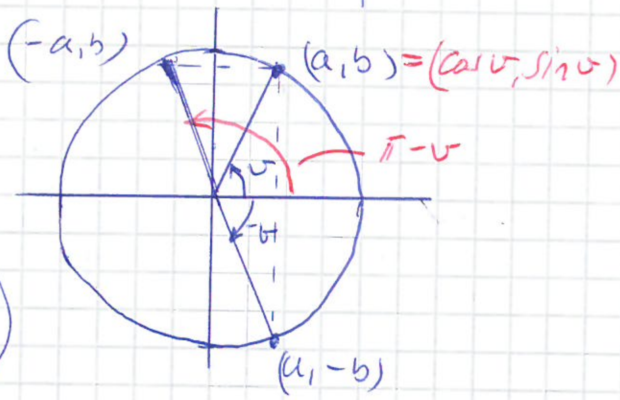
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right) = \sin v$

5) $\cos(-v) = \cos v$ $\quad$ jämn funktion

$\sin(-v) = -\sin v$ $\quad$ udda funktion

6) $\sin(\pi-v) = \sin v$

$\cos(\pi-v) = -\cos v$



(t.ex är $\sin(\pi-v) = b = \sin v$

$\cos(\pi-v) = -a = -\cos v$)

Vidare ser vi följande samband:

* $\sin u = \sin v \iff \begin{cases} u = v + n2\pi \\ \text{eller} \\ u = \pi - v + n2\pi \end{cases}$ för något heltal n

(samma y-koordinat)

* $\cos u = \cos v \iff u = \pm v + n2\pi$ $\quad$ — " —

(samma x-koordinat)

* $\tan u = \tan v \iff u = v + n\pi,\ u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

* $\cot u = \cot v \iff u = v + n\pi,\ u \neq k\pi$

ex 1) Lös ekvationen $\sin x = \cos 2x$.

<u>Lösn:</u> Vi skriver om så vi får en ekvation av typen

$\sin u = \sin v$ eller $\cos u = \cos v$.

Eftersom $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ så får vi att

$\sin x = \cos 2x \iff \cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{u} = \cos\underbrace{2x}_{v} \iff$

$$\frac{\pi}{2} - x = \pm 2x + n2\pi .$$

- $\frac{\pi}{2} - x = 2x + n2\pi$ ger $3x = \frac{\pi}{2} - n2\pi$, dvs $x = \frac{\pi}{6} - n\frac{2\pi}{3}$
- $\frac{\pi}{2} - x = -2x + n2\pi$ ger $x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$

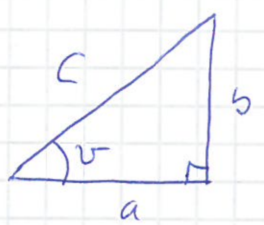
$\therefore$ $x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$ eller $x = \frac{\pi}{6} - n\frac{2\pi}{3}$, n heltal

kan även skrivas + !

(svaret kan sammanfattas som

$x = \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3}$, eller hur?)

För vinklar $v \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ kan trigonometriska funktioners värden illustreras med rätvinkliga trianglar.



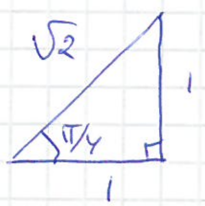
där $c = \sqrt{a^2+b^2}$

$\sin v = \frac{b}{c}$ $\quad$ $\tan v = \frac{b}{a}$

$\cos v = \frac{a}{c}$ $\quad$ $\cot v = \frac{a}{b}$

ex 2) Värden för tre standardvinklar, $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$, får ur två trianglar:

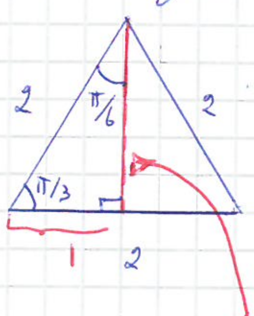
<u>Likbent rätvinklig</u>



$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\frac{\pi}{4} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

Liksidig triangel



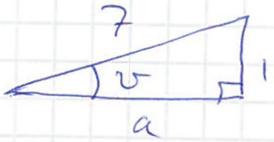
$\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ex 3) Vad är $\tan v$ då $v \in]0, \frac{\pi}{2}[$ och $\sin v = \frac{1}{7}$?

Lösn. Eftersom $v \in]0, \frac{\pi}{2}[$ så kan vi illustrera v i en rätvinklig triangel.



där $a^2 + 1^2 = 7^2$, så $a = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48}$

[a är sidan i en triangel, så $a > 0$!]

Alltså är $\tan v = \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{48}}$

alt: $\sin v = \frac{1}{7}$ ger, av $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, att

$$\cos v = \pm\sqrt{1 - \sin^2 v} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \pm\frac{\sqrt{48}}{7}$$

och $v \in]0, \frac{\pi}{2}[$, så $\cos v > 0$, alltså är $\cos v = \frac{\sqrt{48}}{7}$.

Därav fås $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1/7}{\sqrt{48}/7} = \frac{1}{\sqrt{48}}$

ex 4) Vad är $\tan v$ då $v \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ och $\sin v = \frac{1}{7}$.

Lösn: Som ovan (trig-1) fås $\cos v = \pm\frac{\sqrt{48}}{7}$

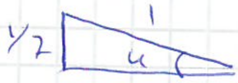
och $\cos v < 0$, så $\cos v = -\frac{\sqrt{48}}{7}$.

Alltså är $\tan v = -\frac{1}{\sqrt{48}}$.

OBS: Rita inga trianglar med negativa sidor

alt: Inför en hjälpvinkel

$\sin u = \sin v = 1/7$

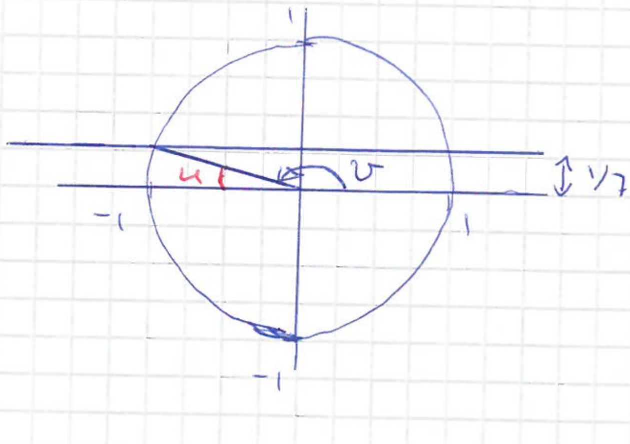


som ger $\cos u = \frac{\sqrt{48}}{7}$

Men $v = \pi - u$, så

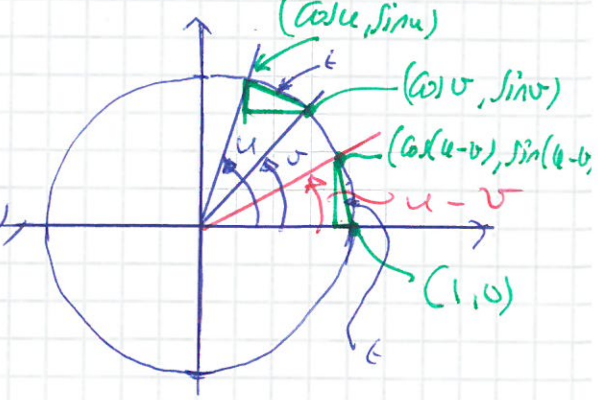
$\cos v = \cos(\pi - u) = -\cos u =$

$= -\frac{\sqrt{48}}{7}$ osv.



Additionsformlerna

Vi har två rätvinkliga trianglar med hypotenusa t. Detta ger



$$(\cos u - \cos v)^2 + (\sin u - \sin v)^2 = t^2 = (\cos(u-v) - 1)^2 + \sin^2(u-v),$$

vilket ger /övning/ att

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v .$$

Använder vi sedan de tidigare sambanden, så får vi

$$\left.\begin{aligned} \cos(u-v) &= \cos u \cos v + \sin u \sin v \\ \cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v \\ \sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v \\ \sin(u-v) &= \sin u \cos v - \cos u \sin v \end{aligned}\right\} \text{additionsformlerna för sin \& cos.}$$

Specialfallet $u = v$ ger

$$\text{dubbla vinkeln}\begin{cases} \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u \overset{\text{trig 1}}{=} 2\cos^2 u - 1 \overset{\text{trig 1}}{=} 1 - 2\sin^2 u \\ \sin 2u = 2 \sin u \cos u \end{cases}$$

och ur den övre av dessa fås dessutom

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}, \quad \sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

(halva vinkeln)

ex) Lös ekv. $\cos 2x + \cos x = 0$

<u>alt 1</u> $\cos 2x + \cos x = 0 \iff 2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$

Sätt $t = \cos x$, så fås $2t^2 + t - 1 = 0 \iff$

$t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = 0 \iff \dots \iff t = -1$ eller $t = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{2}$ ger $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + n2\pi$

$t = -1$ ger $\cos x = -1 \iff x = \pi + n2\pi$

<u>alt 2</u>

$$\cos 2x + \cos x = 0 \iff \cos 2x = -\cos x \iff$$

$$\iff \cos 2x = \cos(x+\pi) \iff 2x = \pm(x+\pi) + n2\pi .$$

$2x = x + \pi + n2\pi$ ger $x = \pi + n2\pi$

$2x = -(x+\pi) + n2\pi$ ger $3x = -\pi + n2\pi$, dvs $x = -\frac{\pi}{3} + n\frac{2\pi}{3}$

dvs $\begin{cases} x = \pi + n2\pi \\ \text{eller} \\ x = -\frac{\pi}{3} + n\frac{2\pi}{3} \end{cases}$ $\left(\text{dvs } x = -\frac{\pi}{3} + n\frac{2\pi}{3}\right)$